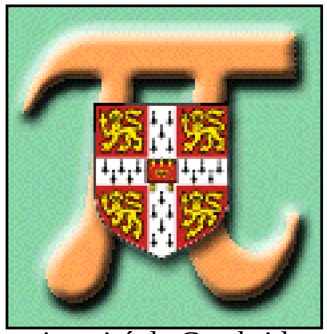
Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr



université de Cambridge

S.C. Woon

Un nouvel algorithme

$$a_0 = 1 \qquad a_n = \sqrt{1 + \left[\sum_{k=0}^{n-1} a_k\right]^2}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2^{n+1}}{a_n} = \pi$$

Tranches de vie

S. C. Woon est étudiant chercheur dans le département de maths appliquées de l'université de Cambridge. Et... c'est tout ce que je sais de lui ! Il n'a en effet pas de page personnelle et ses publications sont encore rares. La formule qui nous intéresse est parue dans la prestigieuse revue *American Mathematical Monthly* en *1995* sous le nom très explicite de *Problem 1441* !

Démonstration

Eh bien vous voulez une preuve ? La voici...
Montrons ainsi par récurrence que :

$$a_n = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$$

Pour n=0, pas de problèmes...
Supposons maintenant le résultat pour un certain n entier naturel non nul.

On a $a_{n+1} = \sqrt{1 + \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)}\right]^2}$ par hypothèse de récurrence.

Or,

$$\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}-\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$$

donc en sommant, les terme de cotangente s'annulent deux à deux, $cotan(\pi/2)=0$ et il reste

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)}=\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}$$

Mais on a aussi $1+\frac{1}{\tan^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}=\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}$ donc on obtient finalement

$$a_{n+1}=\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}}=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}$$ et c'est bien l'hypothèse de récurrence au rang suivant...

On conclut alors par le théorème de récurrence qui nous indique que le résultat est valable pour tout *n* entier naturel.
Ensuite, il est évident par équivalent de *sin(x)* et *x* en *0* que :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{a_n}=\pi$$

Essais

Cette drôle de formule est-elle efficace au fait ?
Eh bien ce n'est pas mal du tout :

n=	a_n
5	*3,14033 (2)*
10	*3,1415914215 (5)*
20	*11* décimales exactes
50	*29* décimales exactes
100	*59* décimales exactes

Un tout petit peu moins de *0,6n* mais une convergence linéaire tout de même, c'est intéressant !
La justification de la convergence linéaire peut être reprise de la démonstration sur la page de Cues où la suite b_n correspondait pratiquement à celle de cette page.

Accélération de la convergence

Comme toute bonne suite à convergence linéaire, le *Delta2* d'Aitken accélère efficacement notre suite. Bien que ce soit les mêmes résultats que sur la page de Cues, je les remets pour vous éviter un chargement supplémentaire !

n=	a_n	*Delta2*(a_n)
5	*3,14033 (2)*	*3,1415955089 (5)*
10	*3,1415914215 (5)*	*3,1415926535921 (10)*
20	*11* décimales justes	*23* décimales exactes
50	*29* décimales exactes	*59* décimales justes
100	*59* décimales justes	...

Je ne peux toujours pas dépasser *100* décimales, en attendant que je me penche un peu sur Mathematica au lieu de Maple Etudiant que j'utilise habituellement...
Toujours est-il que la rapidité de convergence est doublée (presque *1,2n*), ce qui est réellement impressionnant !

Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr