Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr

 

Abraham de Moivre (1667-1754) / James Stirling (1692-1770)

Fondamental...

$$\frac{(n!)^2 e^{2n}}{2n^{2n+1}} \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

$$\forall r \in N^* \quad \frac{(n!)^2 e^{2n}}{2n^{2n+1} e^{2\sum_{k=1}^{r} \frac{|Ber_{2k}|}{2k(2k-1)n^{2k-1}}}} \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Tranches de vie

Abraham de Moivre est né en *1667* à Vitry-le-François, mais s'installe à Londres à *18* ans. L'édit de Nantes vient en effet d'être révoqué et Abraham est fils de huguenots. Il gagne alors sa vie en utilisant son esprit vif et brillant dans les pubs. Il se met ensuite à étudier les mathématiques après la lecture des *Principia* de Newton qu'il dévore ! Amis de Newton justement et membre des principales académies européennes (Royal Society, Paris, Berlin...), il doit cependant se contenter de cours particuliers car, Français, il ne peut enseigner en Angleterre dans les universités...

De Moivre est sans doute un des premiers à s'intéresser aux mathématiques appliquées dans de nombreux domaines. Probabilités, bien sûr, avec son étude de la densité d'une loi normale ($exp(-ax^2)$ et la célèbre formule $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ qui y est associée), mais aussi finance et démographie !
Un mathématicien très complet dont la découverte en *1730* de ce qui est appelée communément la formule de Stirling (eh oui, encore un abus de notation !) n'est pas le moindre de ses succès !
De Moivre s'est aussi intéressé aux nombres complexes avec la célèbre formule qui porte son nom.

Mais j'ai également choisi de faire figurer Stirling sur cette page car c'est tout de même lui qui a popularisé la formule qui porte donc son nom. Il l'a d'ailleurs découverte sous la forme de *ln(n!)* la même année que De Moivre et l'a généralisée en poussant le développement aussi loin que l'on veut (par la série dans la deuxième formule). Il ne reste aucun portrait de ce pauvre Stirling qui est né en *1692* à Garden (Ecosse) et fit ses études à Oxford. Il enseigna à Venise de *1715* à *1725*, puis à Londres à partir de *1726*, et s'intéressa principalement aux courbes et calculs asymptotiques.
Le dessin en haut de la page est son écusson.

Ces deux mathématiciens nous prouvent d'ailleurs combien l'idée souvent répandue qu'à cette époque, les mathématiciens ne quittaient pas leur antre et ne connaissaient rien des travaux de leurs voisins européens, est fausse !

Autour de π

Abraham de Moivre et Stirling ont donc, comme je l'ai dit plus haut, tous les deux trouvé la célèbre formule du haut en *1730*, De Moivre y ajoutant le calcul de la densité d'une loi normale.
Ces deux résultats sont fondamentaux dans bien des domaines et je les utilise un peu partout dans ces pages. Il est facile de remarquer d'ailleurs que dans une certaine mesure, il y a une sorte d'équivalence entre la formule de Stirling et celle de Wallis et que le lien entre les deux formules du haut s'appelle tout simplement la fonction Gamma !

J'aime d'ailleurs tant ce résultat $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$, qui, finalement est preque aussi beau que $exp(i\pi)=-1$, que j'en propose ici pas moins de trois démonstrations !!

Démonstrations

Mais commençons par la formule de Stirling pour liquider ce résultat d'analyse classique en prépa...

Introduisons pour cela la suite $s_n=(n+1/2)Ln(n)-n-Ln(n!)$.

Etudions la convergence de cette dernière en posant $u_n=s_n-s_{n-1}$. On obtient en simplifiant :

$$u_n = -\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)-1 = -\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-1$$

$$= \frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc la série de terme u_n est convergente donc par là même, la suite s_n (car les termes s_{n-1}, s_{n-2}... s'annulent deux à deux lorsque l'on somme u_n).

Donc :

$$s_n \xrightarrow{n\to\infty} L \text{ et en passant à l' exponentielle pour } s_n,\ n! \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{e^L} \text{ donc}$$

$$(n!)^2 \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}}{e^{2L}} \text{ et } (2n!) \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}}{e^L} \text{ et on isole : } e^L = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!\,n^{\frac{1}{2}}}{(n!)^2\,2^{2n+\frac{1}{2}}}$$

Mais d'après la formule de Wallis, on a : $\frac{2^{4n+2}\,n(n!)^4}{((2n+1)!)^2} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$ soit

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!\,n^{\frac{1}{2}}}{(n!)^2\,2^{2n+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ donc finalement } L = -\ln(\sqrt{2\pi}) \text{ et } n! \overset{n\to\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

Cool ! c'est bien ce que l'on voulait !

Néanmoins, je n'ai pas trouvé la démonstration de la formule générale. Je sais seulement qu'elle provient de l'application au logarithme d'un développement de fonction (voir *Encyclopédie Universalis*, il me semble)

Passons maintenant à la densité de la loi normale ou, ce qui revient au même, l'aire sous la "cloche de Gauss". Notons de plus qu'avec le changement de variable sur R^+, $x=t^{1/2}$, on remarque que cela revient à déterminer $\Gamma(1/2)$ où Γ est la célèbre fonction gamma d'Euler définie par : $\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$.

1) Première démonstration : Laissons la parole à Camille Jordan (cours d'analyse à Polytechnique, *1*ère année *1892-1893*) :

Détermination de quelques intégrales définies remarquables.

1° $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$. — Cette intégrale est finie et déterminée. Soit I sa valeur.

Posons $x = \alpha y$, α étant une constante >0.

$$I = \int_0^\infty e^{-\alpha^2 y^2}\alpha\, dy$$

Multiplions par $e^{-\alpha^2}$ et intégrons par rapport à α. de 0 à ∞,

$$I\int_0^\infty e^{-\alpha^2}d\alpha = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\alpha^3(1+y^2)}\alpha\, dy\, d\alpha$$

ou :

$$I^2 = -\int_0^\infty \left[\frac{e^{-\alpha^2(1+y^2)}}{2(1+y^2)}\right]_0^\infty dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{dy}{2(1+y^2)} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arc\,tg} y\right]_0^\infty$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

donc

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

$$2^{\circ}: \int_0^{\infty} e^{-\alpha y^2} y^{2n} \cdot dy \ldots$$ De cette intégrale se déduisent plusieurs autres.

Posons $x = y\sqrt{\alpha}$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy \quad \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

donc :

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy = \frac{1}{2}\, \alpha^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\pi}\,.$$

2) Deuxième méthode : un grand classique de changement de variables !

On considère l'ensemble $C_a = \{(x,y) \in R^{+2} \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$ et le pavé de R^2 $K_a = [0,a]^2$.

Maintenant, introduisons l'intégrale parfaitement définie (est-ce nécessaire de le montrer ?) :

$$I_a = \int_0^a e^{-x^2} dx. \text{ On a } I_a^2 = \left(\int_0^a e^{-x^2} dx\right)\left(\int_0^a e^{-y^2} dy\right) = \int_{Ka} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

(désolé, l'intégrale n'est pas très esthétique, mais le copier-coller de l'éditeur d'équations ne fonctionne visiblement pas très bien !)

L'exponentielle est positive et puisque $C_a \subset K_a \subset C_{a\sqrt{2}}$ on obtient $\iint_{Ca} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq I_a^2 \leq \iint_{Ca\sqrt{2}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$

Ensuite, on considère le difféomorphisme $\varphi(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ dont le jacobien très connu vaut *r*.
En appliquant ce changement de variable à l'intégrale double, on écrit :

$$\iint_{Ca} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a r e^{-r^2} dr = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^a = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-a^2}\right)$$

donc l'encadrement donne :

$$\frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-a^2}\right) \leq I_a^2 \leq \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-2a^2}\right) \text{ donc } \lim_{n\to\infty} I_a = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$ ce qui donne bien le résultat du haut de la page. A noter que les deux écritures du résultat, comme précédemment (intégrale sur R^+), et comme en haut de la page (intégrale sur R) sont équivalentes puisque le terme en exponentielle est pair)

3) Troisième démonstration : Je suis en train de l'écrire !!

Essais

La formule de Moivre/Stirling n'est pas un modèle de performance... mais elle est tellement utile en probabilité et analyse qu'on ne va pas lui en vouloir ! Et puis la généralisation de la formule améliore un peu les performances en poussant *k* plus loin que *0* dans la somme.
Cela donne ainsi pour *k=5* :

$$\frac{(n!)^2 e^{2n-\frac{1}{6n}+\frac{1}{180n^3}-\frac{1}{630n^5}+\frac{1}{840n^7}-\frac{1}{594n^9}}}{2n^{2n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

Voyons plutôt les essais :

n/k	*k=0*	*k=1*	*k=2*	*k=3*	*k=4*	*k=5*
n=5	*3,247 (0)*	*3,1414 (3)*	*3,141594 (5)*	*7* déc.	*8* déc.	*9* déc.
n=10	*3,1943 (1)*	*3,14157 (4)*	*3,1415927 (6)*	*9* déc.	*10* déc.	*12* déc.
n=50	*3,152 (1)*	*7* déc.	*9* déc.	*13* déc.	*16* déc.	*20* déc.
n=100	*3,1468 (2)*	*7* déc.	*10* déc.	*16* déc.	*20* déc.	*23* déc.
n=200	*3,144 (2)*	*8* déc.	*12* déc.	*18* déc.	*22* déc.	*26* déc.

Bien que les termes supplémentaires apportent une certaine efficacité au début, rapidement les suites s'essoufflent et rien n'empêche la convergence logarithmique.
On peut estimer cette convergence :

k=0	*k=1*	*k=2*	*k=3*	*k=4*	*k=5*
Log(n)	*3.9Log(n)*	*5.2Log(n)*	*8Log(n)*	*9,6Log(n)*	*11.5Log(n)*

Mouais, pas terrible... Et pour ne rien arranger, le *Delta2* d'Aitken n'est pas du tout efficace, bon, tant pis !

A noter qu'on le sait, somme et intégrale ne sont guères éloignées mathématiquement (c'est d'ailleurs un même objet en théorie de l'intégrale de Lebesgue, puisque l'intégrale de Riemann correspond à peu près à celle obtenue avec la mesure de Lebesgue, et la somme à celle obtenue avec la mesure de comptage !)
Il n'est donc guère difficile de comprendre que lorsque l'on considère :

$$\left(\frac{1}{10^5}\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n^2}{10^{10}}}\right)^2 = p$$

p est un nombre proche de π. Eh bien, très proche même puisque *p* et π sont égaux sur les *42* premiers milliards de décimales d'après une démonstration des Borwein. Comme quoi, il ne faut pas toujours conclure trop vite lorsque l'on a calculé quelques décimales d'une formule ! Néanmoins, on peut penser que ce genre de formules, s'il n'y avait pas l'exponentielle, pourrait être intéressante à exploiter puisqu'il suffit de faire un calcul approché d'intégrale pour tomber sur des décimales de *Pi*.

Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr