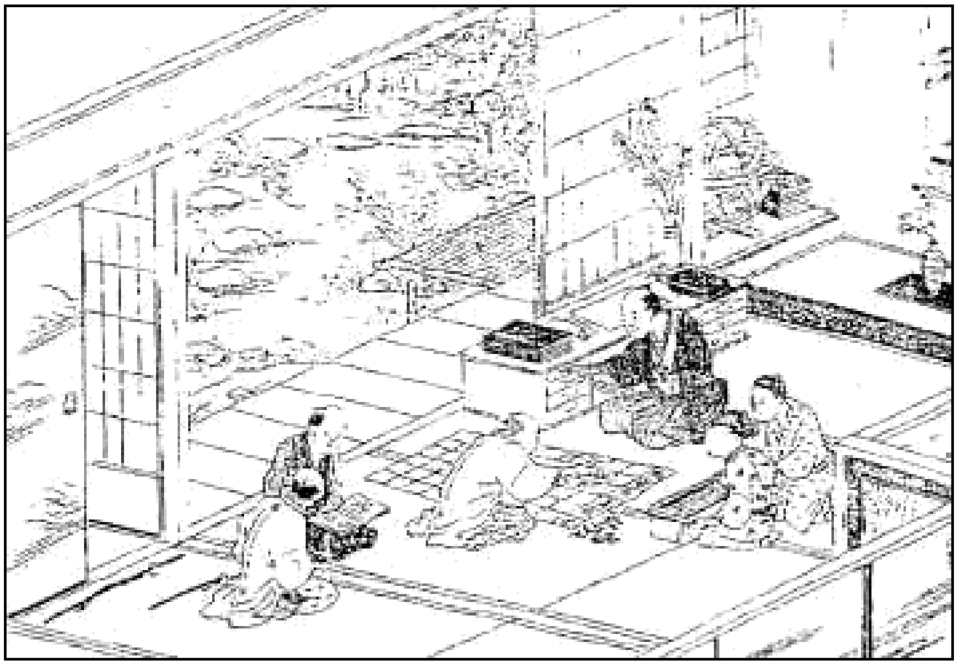
Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr



Takebe Katahiro
(1664 - 1739)

Un bel algorithme

$$\forall r > 1 \quad U_0 = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2r}\right) \qquad U_n = \frac{U_0 U_{n-1}(2n)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{U_0^{n+1}2(n!)^2}{(2n+2)!}$$

$$\pi = r\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} U_n}$$

Tranches de vie

Ce nom n'évoque sans doute rien à la plupart des gens car Takebe Katahiro fut un mathématicien japonais, ce qui est assez peu commun, surtout à cette époque. En effet, né en *1664* d'une famille de samouraï, la mutation d'un Japon encore féodal ne peut qu'encourager Takebe à compléter une formation de samouraï devenue très incomplète... Il assimile rapidement l'enseignement de Seki Takakazu (*? - 1708*), le plus brillant mathématicien du Japon !
Les mathématiques de ce pays ne connaissent pas la science occidentale. Utilisant des batonnets en place des chiffres et sans trigonométrie (!), Seki et son disciple vont construire une nouvelle science au Japon, développant l'algèbre et l'analyse. Takebe meurt en *1739*.

Autour de π :

Takebe s'intéresse à *Pi*, et en calcule même *41* décimales à l'aide de la méthode d'Archimède et un polygone à *1024* côtés, ce qui est un exploit vu le système numérique utilisé !
Cela n'empêche pas Takebe de nous proposer par ailleurs une formule vraiment très intéressante, puisque notre ami japonais est le premier à avoir réussi à exprimer le carré de

l'arc d'un cercle sous la forme d'une somme infinie dans son *Classique de Tetsujutsu* (*1722*) .
Les démonstrations n'étant pas encore de rigueur (malheureusement !), il nous est parvenu seulement la méthode numérique qu'il a utilisée pour arriver à sa formule...
On en tire facilement un algorithme en notations modernes puis une somme qui a des performances intéressantes. N'ayant pu dénicher nulle part de démonstration, j'ai cherché moi-même et en ai trouvé une pas trop difficile, mais suis toujours à la recherche d'une méthode plus élégante !

Démo

Posons $f(u)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2\,2^{2n}\,u^{2n+2}}{(2n+2)!}$ et $U_n=\frac{(n!)^2\,2^{2n}\,u^{2n+2}}{(2n+2)!}$. On a :

$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{(n+1)^2\,2^2\,u^2}{(2n+4)(2n+3)}\xrightarrow{n\to\infty}u^2$ donc d'après le critère de D'Alembert, la série converge pour $u<1$. (En passant, avec la formule de Moivre/Stirling, on montre facilement que la série n'est pas convergente pour $u=1$)
La fonction étant paire, elle est donc définie sur $]-1,1[$.
Nous allons chercher l'expression exacte de f par un processus classique mais que l'on pourrait qualifier de "bourrin, typique prépa" !
Cherchons en effet l'équation différentielle que vérifie f !
On a :

$$f(u)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2\,2^{2n}\,u^{2n+2}}{(2n+2)!}\qquad f'(u)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2\,2^{2n}\,u^{2n+1}}{(2n+1)!}\qquad f''(u)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2\,2^{2n}\,u^{2n}}{(2n)!}$$

donc calculons pour $u\in[0,1[$:

$$-uf'(u)+\left(1-u^2\right)f''(u)=\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{(n!)^2\,2^{2n}\,u^{2n+2}}{(2n+1)!}+\frac{(n!)^2\,2^{2n}\,u^{2n+1}}{(2n)!}-\frac{(n!)^2\,2^{2n}\,u^{2n+2}}{(2n)!}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{((n-1)!)^2\,2^{2n-2}\,u^{2n}}{(2n-1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2\,2^{2n}\,u^{2n}}{(2n)!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n-1)!)^2\,2^{2n-2}\,u^{2n}}{(2n-2)!}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{((n-1)!)^2\,2^{2n-2}\,u^{2n}}{(2n-2)!}\left(\frac{-1}{(2n-1)}+\frac{4n^2}{(2n)(2n-1)}-1\right)$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{((n-1)!)^2\,2^{2n-2}\,u^{2n}}{(2n-2)!}\left(\frac{-(2n)+4n^2-(4n^2-2n)}{(2n)(2n-1)}\right)=1$$

donc $y=f(u)$ vérifie :

$$-uy'+(1-u^2)y''=1\quad\Leftrightarrow\quad\frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}y'+y''\sqrt{1-u^2}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

On intègre entre 0 entre $x\in]0,1[$:

$$\int_0^x \frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}\, y' + y''\sqrt{1-u^2}\,du = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

$$\Leftrightarrow \quad y'\sqrt{1-x^2} - y'(0) = \text{Arcsin}(x) - \text{Arcsin}(0)$$

or, *y'(0)=0* (*u=0* dans la série entière de limite *f'(u)*) donc on intègre encore :

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\text{Arcsin}(x) \quad \Rightarrow \quad y(u) - y(0) = \int_0^u \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\text{Arcsin}(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad y(u) - 0 = f(u) = \frac{1}{2}(\text{Arcsin}(u))^2 - 0 \quad car \quad y(0) = 0 \;\; (f(0) = 0)$$

Posons enfin pour *r>1* : $U_0 = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2r}\right)$. On a :

$$\frac{\pi^2}{r^2} = 4\left(\text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2r}\right)\right)\right)^2 = 8f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2r}\right)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} 8\frac{(n!)^2 2^{2n}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2r}\right)\right)^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

$$\Leftrightarrow \quad \pi = r\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} 2\frac{(n!)^2\left(4\sin^2\left(\frac{\pi}{2r}\right)\right)^{n+1}}{(2n+2)!}} = r\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} U_n} \quad avec \quad U_n = \frac{2(n!)^2\,U_0^{n+1}}{(2n+2)!}$$

ce qui achève la démonstration ! Il va sans dire que les deux formes de U_n se déduisent facilement l'une de l'autre par récurrence immédiate (tellement immédiate d'ailleurs que je ne l'écris même pas !)

Essais

Non seulement la formule est assez belle mais ses performances sont loin d'être ridicules ! Il faut dire que la convergence linéaire est assez évidente d'après la forme du rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)^2 2^2 u^2}{(2n+4)(2n+3)} \xrightarrow{n\to\infty} u^2 = \sin^2\left(\frac{\pi}{2r}\right)$ dans notre cas ici. Cela veut dire en effet qu'avec *n* assez grand, la suite U_n se comporte presque comme une suite géométrique de raison $\sin^2\left(\frac{\pi}{2r}\right)$. L'équivalence de Moivre/Stirling nous donne d'ailleurs :

$$U_n \underset{\sim}{\overset{n\to\infty}{}} \frac{U_0^{\,n+1} 2n^{2n}e^{-2n}2\pi n}{(2n+2)^{2n+2}e^{-2n-2}\sqrt{2\pi(2n+2)}} \underset{\sim}{\overset{n\to\infty}{}} \frac{\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{2r}\right)\right)^{n+1} 2e^2\sqrt{\pi}}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$$donc \quad -\log(U_n) \underset{\sim}{\overset{n\to\infty}{}} n\log\left(\sin^{-2}\left(\frac{\pi}{2r}\right)\right) + \frac{3}{2}\log(n)$$

donc la convergence est un petit peu plus rapide que la convergence linéaire...
Théoriquement, on peut même construire grâce aux différentes valeurs de r des suites convergeant presque linéairement aussi vite que l'on veut !
Vérifions tout cela par des petits essais (pour *r=2*) :

n=1	*3,055050*
n=5	*3,1399 (1)*
n=10	*3,141568 (4)*
n=20	*3,14159264 3 (7)*
n=50	*17* décimales justes
n=100	*33* décimales justes
n=200	*64* décimales justes

ce qui donne une convergence d'environ *n / 3*, pas trop mal...

Maintenant pour *r=3* :

n=5	*3,14157 (4)*
n=10	*3,14159264 4 (7)*
n=50	*33* décimales justes
n=100	*63* décimales justes

Convergence d'environ *2n/3*

Et ensuite pour *r=6* :

n=5	*3,141592646 (7)*
n=10	*13* décimales justes
n=50	*61* décimales justes

Convergence *1.2n* ?

Enfin, pour s'amuser un peu, *r=12*

n=5	*11* décimales justes
n=10	*20* décimales justes
n=50	*92* décimales justes

On flirte avec la convergence *2n*, mais il est assez étonnant que la convergence ait l'air de s'essoufler alors qu'elle devrait être un peu meilleure que la convergence linéaire...

On remarquera que pour *r=2* ou *r=3*, on obtient une série de rationnels qui ne demandent qu'une extraction de racine à la fin, intéressant !

Accélération de la convergence

Comme d'habitude avec les convergence linéaires (c'est-à-dire que les suites ressemblent de plus en plus à une suite géométrique), le *Delta2* d'Aitken devrait être terriblement efficace. Mais c'est en fait un peu décevant...

Pour *r=2* :

	Sans Aitken	*Avec Aitken*
n=2	*3,112 (1)*	*3,132 (1)*
n=5	*3,1399 (1)*	*3,141428 (3)*
n=10	*3,14168 (4)*	*3,14159179 (5)*
n=20	*3,14159243 (7)*	*3,141592653479 (9)*
n=50	*17* décimales justes	*19* décimales justes
n=100	*33* décimales justes	*35* décimales justes
n=200	*64* décimales justes	*66* décimales justes

inutile de pousser la démonstration plus loin, le *Delta2* ajoute *2* décimales au résultat, ce qui n'est guère concluant !

Pour *r=6*

n=5	*3,14159246 (7)*	*3,1415926525 (9)*
n=10	*13* décimales justes	*15* décimales exactes
n=50	*61* décimales justes	*65* décimales exactes

A peine mieux, même si *4* décimales supplémentaires pour *n=50*, cela commence à devenir un peu plus intéressant.. Je ne peux malheureusement pousser les calculs plus loin pour l'instant...

Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr