Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr

Ernesto Cesàro
(1859 - 1906)

Proba et Pi-toresque (1881)

La probabilité que deux entiers choisis au hasard soient premiers entre eux est $\frac{6}{\pi^2}$...
Si l'on veut pouvoir utiliser ce résultat, il convient de reformuler : Si l'on choisit deux entiers inférieurs à *n*, la probabilité P_n qu'ils soient premier entre eux tend vers $\frac{6}{\pi^2}$ lorsque n tend vers l'infini.

Tranches de vie

Cesàro est né à Naples en *1859*. Après des études à l'école des Mines de Liège, il enseigne à l'université de Naples à partir de *1883*.
S'intéressant à l'arithmétique et les séries, il meurt néanmoins prématurément en essayant de sauver son fils de la noyade...

Autour de π

Un grand résultat sur *Pi* dans le domaine des Probabilités ! Car la condition du théorème (*2* entiers au hasard) peut être retranscrite de façons très diverses et nombreux sont ceux qui ont eu là-dessus des idées brillantes ou peu sérieuses ! Pour la détente, je vous conseille un petit coup d'oeil à la rubrique Essais...

Démonstration

Fixons tout d'abord, comme dans la deuxième formulation du théorème, un entier *n*.
Nous allons faire un peu de dénombrement en comptant le nombre de couples (i,j) où i et j sont inférieurs à n et premiers entre eux...

1. La première condition pour qu'ils soient premiers entre eux est qu'ils ne soient pas tous les deux multiples de *2*. Comme un nombre sur deux est multiple de *2* (!), la probabilité que i **et** j soient divisibles par *2* est $1/2*1/2=1/2^2$.
Donc la probabilité que i et j ne soient pas multiples de *2* est $(1-1/2^2)$.

2. La deuxième condition est que i et j ne soient pas multiples de *3* tous les deux. De même que précédemment, cette probabilité vaut $(1-1/3^2)$.
Tiens, tiens, ça rappelle quelque chose !

Ces conditions étant indépendantes, la probabilité que *i* et *j* ne soient ni multiple de *2* ni de *3* est $(1-1/2^2)(1-1/3^2)$.
Or *i* et *j* seront premiers entre eux si ils ne sont multiples d'aucun entier tous les deux, c'est à dire d'aucun nombre premier tous les deux puisque tout nombre est décomposable en facteurs premiers. En continuant pour tous les nombres premiers les conditions précédentes, on obtient que la probabilité *P* que *i* et *j* soient premiers entre eux vaut lorsque *n* tend vers l'infini :

$$\prod_{p=2,\ premier}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

Mais, mais ! D'après la section 4) de la partie Démonstration de la page Euler, ceci veut dire que la probabilité cherchée est :

$$P = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{-1} = \frac{6}{\pi^2}$$

Tout cela est un peu qualitatif, mais le principe est surtout important et la démonstration peut être rendue parfaitement rigoureuse dans le détail !

Essais

Le résultat est surtout important du point de vue arithmétique, et, bien sûr, comme toujours en probabilité, la convergence est extrêmement lente. On ne peut obtenir en pratique plus de *5* décimales avec cette méthode...
Néanmoins, laissons courir notre imagination... La taille en millimètre d'un couple, les chiffres d'une loterie, les décimales d'un nombre normal sont autant de générateurs de couples d'entiers !
Par exemple, R. Matthews a utilisé les coordonnées des *100* plus brillantes étoiles de la voute céleste... Voilà des couples d'entiers qui lui ont donnés *Pi=3,12772*. C'est exact à *0,5%* près alors... *Pi* serait-il une composante cachée de l'univers ?
En utilisant les décimales de *Pi* en tranches de *8* chiffres, J. Chuan a obtenu *Pi=3,146634*. Alors là, *Pi* qui donne *Pi*, c'est extrêmement fort !
Si vous avez d'autres idées, n'hésitez pas à m'en faire part.

Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr