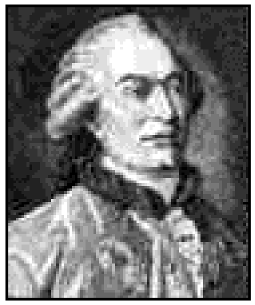
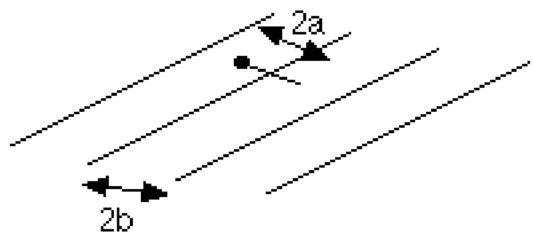
Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr



Georges-Louis Leclerc Comte de Buffon
(1707 - 1788)

Un élégant résultat

Si on laisse tomber une aiguille de longueur *2a* sur un parquet formé de lames de largeur *2b*, la probabilité pour que l'aiguille coupe l'une des raies de ce parquet est $\frac{2a}{\pi b}$



Tranches de vie

Georges Louis Leclerc est né en *1707*. Bien sûr, son oeuvre principale est celle d'un naturaliste. Ainsi, l'*Histoire naturelle générale et particulière* (*15* volumes !), l'*Histoire naturelle des oiseaux* (*9* vol.), le *Supplément à l'histoire naturelle* (*7* vol.) et autre *Histoire naturelle des minéraux et traité de l'aimant* (*5* vol.) lui vaudront la plus grande célébrité... D'autant plus que son style est très agréable... Mais, philosophe également, cet excellent administrateur fut membre de toutes les grandes académies européennes et s'intéressa aux mathématiques... Tiens, tiens !.. Dans son *Essai d'arithmétique morale* publié en *1777*, un volume intitulé *Mémoire sur le jeu du franc carreau* présente en effet le célèbre problème de l'aiguille...

Autour de π

Ce problème est un des premiers à faire intervenir les probabilités et *Pi*. Encore une preuve de l'omniprésence de ce nombre en mathématiques. Evidemment, cette présence n'est pas étrangère à la définition géométrique originelle de *Pi* comme périmètre du cercle de diamètre *1*... Mais le mélange subtil avec l'analyse est très plaisant ! Tellement agréable d'ailleurs que deux preuves sont relatées ci-dessous. Bien sûr, le plancher est supposé plat (restons dans des espaces euclidiens !).
En fait, il ne faut pas espérer obtenir une bonne approximation de *Pi* en allant simplement acheter un paquet d'aiguilles au coin de la rue ! Une précision de 10^{-3} est obtenue avec une probabilité de *95%* à partir de *888 697* lancers.

Démonstrations

1) Un peu de géométrie...

Avec les hypothèses du haut de la page (longueur d'une aiguille *2a*, largeur des lames *2b*) :

Désignons par y la distance du milieu de l'aiguille ($0 \le y \le 2b$) à la raie du bas et par ß l'angle entre l'aiguille et la raie $\left(0 \le \beta \le \frac{\pi}{2}\right)$.

Si $y + a*\sin(\beta) \ge 2b$ ou $y - a*\sin(\beta) \le 0$ alors respectivement, l'aiguille coupe la raie du haut ou celle du bas...
Donc, il y aura intersection si le point *P* défini par ses coordonnées *(ß,y)* appartient à la zone hachurée du graphique ci-contre :
Or, la distribution de *y* sur *[0,2b]* et *ß* sur *[0,π/2]* est uniforme et donc la probabilité cherchée représente le rapport de l'aire de la surface hachurée à l'aire du rectangle *[0,2b]*[0,π/2]* (qui contient tous les cas possibles). Or l'aire du rectangle est *A=π/2*2b=bπ*.

Et l'aire de la surface hachurée est $B=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} a*\sin(\beta)\,d\beta$ (les *2* surfaces hachurées ont même aire car elles sont symétriques par rapport à la droite d'équation *y=b*)

d'où la probabilité cherchée est $p=\frac{2\int_0^{\frac{\pi}{2}} a*\sin(\beta)\,d\beta}{\pi b}=\frac{2a\left[-\cos(\beta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}{\pi b}=\frac{2a}{\pi b}$.

Si l'on a une grande patience, il suffit de lancer un grand nombre de fois *n* l'aiguille sur le sol et de compter le nombre d'intersections. En prenant *b=2* et *a=1*, la loi des grands nombres nous permet de conclure que $\frac{n}{d} \overset{n\to\infty}{\sim} \pi$.

2) Emile Borel a aussi trouvé une démonstration astucieuse et rapide de ce résultat de Buffon... Quelque soit sa forme, le nombre d'intersections d'une aiguille avec le bord des lattes est proportionnel à sa longueur *2a* et inversement proportionnel à la largeur *2b* des lattes. Donc il peut s'écrire sous la forme *Ka / b*. Reste à trouver la constante *K*...
Et là, astuce ! Prenons une aiguille circulaire de diamètre *2b*. Son périmètre, donc sa longueur, est évidemment *2πb*. Quelle que soit la façon dont elle tombe, elle coupe exactement *2* fois les raies... donc on en déduit *2=Ka/b=Kπb/b=Kπ*, d'où *K=2/π* et la probabilité cherchée est $\frac{2a}{\pi b}$!

Essais

Quelques individus patients ont tenté leur chance au lancer d'aiguilles... Notamment Wolf en *1850* qui se munit de *5000* aiguilles avec *a=0.8b* et observe *2532* intersections ce qui l'amène à l'approximation *π=3.1596*.
Pour ma part, je n'ai pas encore essayé. A mon sens, le principe est surtout intéressant, mais l'expérimentation est longue et peu efficace, ce qui limite l'intérêt. Mais rien n'empêche d'automatiser le processus !

Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr