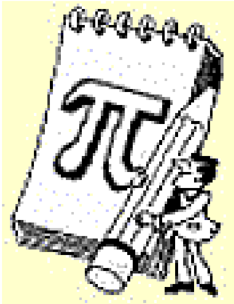
Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr



Le "Rounding Up" de Kevin Brown

Principe

Alors, prenons un entier naturel non nul *n*. Par exemple *10*. Jusqu'ici tout va bien !
Considérons ensuite le plus proche multiple supérieur ou égal de *n-1*.
Dans notre cas, on trouve *18* car il est multiple de *9=10-1* et supérieur à *10*.
Réitérons le procédé en considérant le plus proche multiple supérieur ou égal de *n-2*, ici *24*, puis de *n-3* (*28*), de *n-4* (*30*) et ainsi de suite pour *n-k* jusqu'à ce que l'on arrive à *k=n-1*. On note *f(n)* le résultat (*f(10)=34*).

Eh bien, figurez-vous que $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{f(n)} = \pi$

Erdös et Jabotinski ont prouvé que plus précisément :

$$f(n) = \frac{n^2}{\pi} + O\left(n^{4/3}\right)$$

Un deuxième principe

En fait, Erdös et Jabotinski n'utilisaient pas cette construction qu'ils ne mentionnent même pas, elle semble avoir été découverte par Kevin Brown.
Ils considéraient une sorte de crible un peu similaire à celui d'Eratosthene.
La séquence *f(1) f(2) f(3)*... peut être construite de la manière suivante :

Partons de la séquence *1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13...*
On enlève un élément sur deux en partant du troisième (*3*). Donc, on garde
1 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 24 26 28 30 32 34...
On enlève ensuite un élément sur trois en partant du cinquième :
1 2 4 6 10 12 16 18 22 24 28 30 34...
Puis un élément sur quatre en partant du septième :
1 2 4 6 10 12 18 22 24 30 34...
Puis un élément sur cinq en partant du neuvième :
1 2 4 6 10 12 18 22 30 34...
Et ainsi de suite en enlevant un élément sur *(k+1)* en partant du *(2k+1)*ème élément.

Je ne sais pas par contre si il a été démontré que c'était la même séquence que précédemment, ou bien alors, c'est peut-être évident et je ne le vois pas !

Constructions préliminaires de K. Brown

Le plus simple est de reprendre l'exemple de K. Brown avec comme nombre n de départ *100*. Voici un tableau ou x représente les n-k et y les multiples supérieurs ou égal au précédent n-k+1. C'est tout le travail que l'on a fait plus haut avec x=*9*, y=*18*, puis x=*8* et y=*24* etc... On note de plus $w=y/x$

x	w	y	x	w	y	x	w	y	x	w	y
100	1	100	75	26	1950	50	51	2550	25	122	3050
99	2	198	74	27	1998	49	53	2597	24	128	3072
98	3	294	73	28	2044	48	55	2640	23	134	3082
97	4	388	72	29	2088	47	57	2679	22	141	3102
96	5	480	71	30	2130	46	59	2714	21	148	3108
95	6	570	70	31	2170	45	61	2745	20	156	3120
94	7	658	69	32	2208	44	63	2772	19	165	3135
93	8	744	68	33	2244	43	65	2795	18	175	3150
92	9	828	67	34	2278	42	67	2814	17	186	3162
91	10	910	66	35	2310	41	69	2829	16	198	3168
90	11	990	65	36	2340	40	71	2840	15	212	3180
89	12	1068	64	37	2368	39	73	2847	14	228	3192
88	13	1144	63	38	2394	38	75	2850	13	246	3198
87	14	1218	62	39	2418	37	78	2886	12	267	3204
86	15	1290	61	40	2440	36	81	2916	11	292	3212
85	16	1360	60	41	2460	35	84	2940	10	322	3220
84	17	1428	59	42	2478	34	87	2958	9	358	3222
83	18	1494	58	43	2494	33	90	2970	8	403	3224
82	19	1558	57	44	2508	32	93	2976	7	461	3227
81	20	1620	56	45	2520	31	96	2976	6	538	3228
80	21	1680	55	46	2530	30	100	3000	5	646	3230
79	22	1738	54	47	2538	29	104	3016	4	808	3232
78	23	1794	53	48	2544	28	108	3024	3	1078	3234
77	24	1848	52	49	2548	27	112	3024	2	1617	3234
76	25	1900	51	50	2550	26	117	3042	1	3234	3234

Il faut lire le tableau de x=*100* vers x=*1*. L'écart entre deux y consécutifs décroit, ce qui est normal vu la construction de y. Tant qu'il n'atteint pas *0*, w croit donc, d'une unité à chaque fois. Comme l'écrat entre deux y décroit de deux en deux, fatalement oserais-je dire, cet écart atteint *0* en x=*50*.
Jusqu'à ce stade, on peut modéliser y par la parabole f_1 :

$$y=(101-x)x$$

Ensuite, tout naturellement, l'écart entre deux y consécutifs décroit de quatre en quatre et w croit donc de deux en deux jusqu'à x=*38*. Le modèle s'écrit alors comme la parabole f_2 d'équation :

$$y=(151-2x)x$$

qui atteint son maximum, et donc sa dérivée nulle, et donc l'écart nul avec le précédent, en $x=\dfrac{151}{2.2}\approx 38$ pour les x entiers.
Et effectivement, à partir de x=*38*, l'écart entre deux y consécutifs décroit de six en six et w

s'accroit de trois en trois. y vaut alors :

$$y=(189-3x)x$$

qui représente la parabole f_3, et ainsi de suite...
Si bien que pour la k-ième parabole, on peut écrire :

$$y=(A_k-k.x)x$$

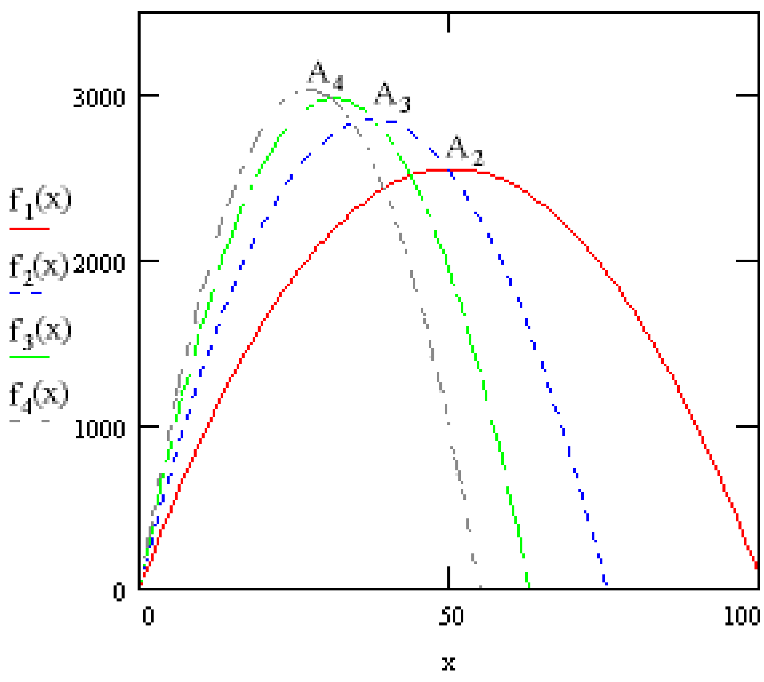
avec A_k entier. Si l'on dérive pour connaitre le maximum de cette parabole comme on l'a fait plus haut, cela donne pour x :

$$x_k = \frac{A_k}{2k} \quad et \quad y_k = (A_k - k.x_k)x_k = k.x_k^2 \quad (1)$$

Pour trouver la valeur de A_k, il suffit alors de calculer le point d'intersection entre le k-ième parabole et la maximum de la précédente parabole, c'est à dire :

$$(A_k - k.x_{k-1})x_{k-1} = y_{k-1} \quad \Leftrightarrow \quad A_k = \frac{y_{k-1} + k.x_{k-1}^2}{x_{k-1}} \quad (2)$$

On peut le voir sur le graphique suivant où f_1, f_2, f_3... sont les paraboles respectives dont on a calculé les équations précédemment.



On remplace alors y_{k-1} par la valeur trouvée en (1) et on obtient :

$$A_k = \frac{(2k-1).x_{k-1}^2}{x_{k-1}} = (2k-1)x_{k-1}$$

Mézalors, avec la valeur de A_k trouvée en (1), on peut écrire :

$$x_k = \frac{2k-1}{2k} x_{k-1}$$

pour *k>1*, car pour *k=1*, on a :

$$x_1 = \frac{x_0+1}{2} \quad \text{à la place de} \quad x_1 = \frac{x_0}{2} \quad \text{car} \quad y_0 = x_0 \quad \text{et non} \quad y_0 = k.x_0^2$$

En débutant avec $x_0=y_0=n$ puisque l'on part de l'entier considéré au départ, on obtient :

$$x_k = x_1 \prod_{j=2}^{k} \frac{2j-1}{2j} == (n+1) \prod_{j=1}^{k} \frac{2j-1}{2j} \quad \text{donc} \quad y_k = k.x_k^2 = k(n+1)^2 \left(\prod_{j=1}^{k} \frac{2j-1}{2j} \right)^2$$

Lorsque k tend vers l'infini, y_k atteint toujours la valeur *f(n)* (puisque pour *n=100* par exemple, k ne peut dépasser *100*)

En conclusion, lorsque l'on fait tendre cette fois-ci n vers l'infini, on a alors :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{f(n)} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \left(\prod_{j=1}^{k} \frac{2j}{2j-1} \right)^2 = \lim_{k\to\infty} 2 \prod_{j=1}^{k} \frac{2j}{2j-1} \prod_{j=1}^{k} \frac{2j}{2j+1} = 2 \prod_{j=1}^{\infty} \frac{4j^2}{4j^2-1} = \pi$$

d'après Wallis !

Et voilà un beau résultat de plus...

Essais

Voici un programme de calcul de la valeur *f(n)* sous Maple. Il n'est certainement pas optimisé, j'ai simplement cherché un moyen court et simple d'évaluer *f(n)* pour procéder à quelques essais.

```
brown := proc(n)
     local x,f,i,y;
         x := n;
         f := n;
         for i from x by -1 to 2 do
             y := i-1; while y < f do  y := y+i-1 od; f := y
         od
     end
```

n=	n^2/f(n)=
10	2,94117
50	3,1172
100	3,0921459
200	3,14169
500	3,13999
1000	3,1390275

Hum, bon, visiblement c'est une suite amusante... En fait, si l'on se rapproche effectivement inéluctablement de *Pi* avec *n*, certaines valeurs de *n* sont favorables à la précision du calcul comme *n=200* et d'autres beaucoup moins... De toutes façons, cela semble être une convergence logarihmique, comme pour le produit infini de Wallis

---

D'après la page de Kevin Brown
Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr