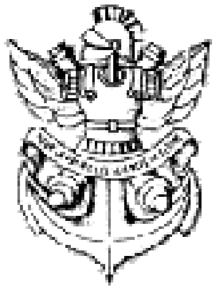
Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr

blason de l'Ecole Polytechnique

Fabrice Bellard

(1973)

Formules importantes

$$\pi = \frac{1}{64}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{2^{10i}}\left(-\frac{32}{4i+1}-\frac{1}{4i+3}+\frac{256}{10i+1}-\frac{64}{10i+3}-\frac{4}{10i+5}-\frac{4}{10i+7}+\frac{1}{10i+9}\right)$$

$$\pi = \frac{1}{740025}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3P(n)}{\binom{7n}{2n}2^{n-1}} - 20379280\right)$$

avec $P(n) = -885673181n^5 + 3125347237n^4 - 2942969225n^3 + 1031962795n^2 - 196882274n + 10996648$

Tranches de vie

Fabrice Bellard est un garçon assez exceptionnel. Peut-être un des plus doués de notre génération. Après des études brillantes au lycée et en prépa à Joffre (Montpellier) où déja, il conçoit un logiciel de compression des données sans perte (le fameux *LZEXE*), il entre en *1993* à l'école Polytechnique (*76e* au concours sur *6000* candidats). Il choisit ensuite Télécom Paris comme école de spécialisation en *1996*.
Concepteur de nombreux logiciels dans des domaines aussi variés que la compression, la *3D*, la musique, c'est assurément un informaticien de tout premier plan !
A seulement *25* ans, son expérience professionnelle et ses réalisations sont déja impressionnantes comme on peut le voir sur son site.

Autour de π

Après quelques calculs en *1995*, Fabrice Bellard s'est intéressé de plus en plus à *Pi* et a notamment découvert les deux formules du haut au moyen de l'algorithme PSLQ, qui permet de tester certaines relations numériques. Notons néanmoins que la seconde n'est pas démontrée...
De plus, Simon Plouffe a élaboré en *1996* un algorithme pour calculer en système décimal (et non plus en hexadécimal comme la formule BBP) le *n*-ième digit de *Pi*. Malheureusement, sa complexité en $O(n^3 \log(n))$ le rendait inutilisable en pratique. Eh bien, Bellard s'y est tout simplement plongé et a amélioré l'algorithme en $O(n^2)$! Rien que cela !

Mais son grand coup d'éclat reste le calcul en binaire du 1000 milliardième digit de Pi (qui est un 1 en passant) utilisant plusieurs stations dont des Ultrasparcs...
Le record actuel est le 40 000 milliardième digit en binaire de *Pi* (*0*) par Colin Percival.
(Jusqu'où irez-vous ? comme diraient certaines personnes désagréables avec le monde Apple... blague publicitaire française...)

Démo

Eh bien voici le résumé de la démonstration telle que Fabrice Bellard la donne.

On considère $\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^k}{k}$ avec $|z|<1$

donc en particulier :

$$\text{pour } |a| \geq \sqrt{2} \quad \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{a-1}\right) = \operatorname{Im}\left(\ln\left(1-\frac{i+1}{a}\right)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{a^{4k+3}}\left(\frac{a^2}{4k+1}+\frac{2a}{4k+2}+\frac{2}{4k+3}\right)$$

(1)

$$\text{et} \quad \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{a+1}\right) = \operatorname{Im}\left(\ln\left(1-\frac{i-1}{a}\right)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{a^{4k+3}}\left(\frac{a^2}{4k+1}-\frac{2a}{4k+2}+\frac{2}{4k+3}\right) \quad (2)$$

Si l'on fait *a=2* dans *(1)*, on obtient :

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k}\left(\frac{2}{4k+1}+\frac{2}{4k+2}+\frac{1}{4k+3}\right)$$

Il suffit ensuite de considérer les relations en *arctan* :

$$\frac{\pi}{4} = 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right) \qquad (3)$$

$$\frac{\pi}{4} = 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right)$$

$$\frac{\pi}{4} = 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{9}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{32}\right)$$

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)$$

Et avec la relation *(3)* et *(1)*, on obtient :

$$\pi = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)4^k} - \frac{1}{64}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1024^k}\left(\frac{32}{4k+1}+\frac{8}{4k+2}+\frac{1}{4k+3}\right)$$

ce qui, en réordonnant les termes, permet d'obtenir la formule finale du haut de la page...

Essais

Allons y ! Cette formule améliore en théorie de *43%* le calcul avec la formule BBP. La forme nous indique que la convergence est en *10.n.log(2)=3n* environ ce qui est bien !

n=0	*3,1417*
n=2	*9* décimales justes
n=5	*19* décimales
n=10	*34* décimales
n=20	*64* décimales

Et pour la deuxième formule :

n=1	*0,02452* !
n=5	*3,1416*
n=10	*12* décimales
n=20	*32* décimales
n=50	*94* décimales

Eh bien voilà une convergence qui s'accélère ! Du moins au début car passé les premières valeurs de *n*, cela va se stabiliser. En appliquant l'équivalence de Moivre/Stirling au terme de la série, on trouve d'ailleurs que la rapidité de convergence est en $2.12*n-5*\log(n)$ environ, ce qui est tout de même assez correct.

Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr