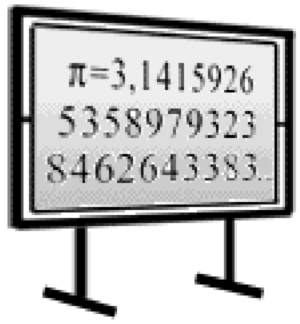
Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr



Approximations et bizarreries sur Pi

Cette page est ainsi consacrée aux approximations rationnelles et irrationnelles qui se rapprochent le plus de *Pi*. Et il y en a de fameuses !
Sans oublier quelques curiosités approximatives concernant *Pi*.

En effet, depuis que l'on s'est rendu compte de l'existence d'une constante définissant le rapport du périmètre d'un cercle sur son diamètre, ce qui se situe à l'époque des Egyptiens et Babyloniens, les mathématiciens ont tenté de donner une valeur exacte de *Pi*, ou ont ensuite donné des approximations simples de *Pi* après le *XVIIIe* siècle.

Dans l'antiquité

Bien sûr, dans l'antiquité, ces mathématiciens ne savaient pas que *Pi* était irrationnel, ni même transcendant. Alors on tenait certaines valeurs estimées de *Pi* pour exactes !
Tout ce cheminement dans l'antiquité est relaté sur la page de l'ère géométrique, je rappelerai seulement ici les valeurs :
Donc, les Babyloniens avaient estimé :

$$3+\frac{7}{60}+\frac{30}{3600}=3+\frac{1}{8}=3,125$$

ce qui est assez remarquable pour l'époque.
Le scribe Ahmès chez les Egyptiens avait obtenu :

$$\pi=(16/9)^2=3,16...$$

La Bible est resté célèbre pour son estimation hasardeuse de *Pi* : *3* !!

On se rappelle qu'Archimède avait encadré Pi, ce qui prouve qu'il avait conscience de ne pas être tombé sur la bonne valeur.

$$3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7}$$

En Chine, Tsu Chung Chih devance les occidentaux et propose :

$$355/113 = 3{,}1415929 2\ldots$$

Mais revenons en Occident. Tentant toujours d'obtenir une valeur exacte pour *Pi*, Nicolas de Cues propose :

$$\pi = \frac{3}{4}\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right) \approx 3{,}136$$

Le plus fort reste sans aucun doute Edward Johnston Goodwin (*1828-1902*) qui déposa, en *1897* dans l'Indiana aux Etats-Unis, un projet de loi où diverses formules appliquées auraient conduit à assigner pour valeur à *Pi* : *4*, puis *3.1604*, puis *3.2* et enfin *3.232* !
Bien sûr, cet auteur ingénieux avait résolu la quadrature du cercle, la trisection de l'angle et la duplication du cube, démontrées insolubles quelques années auparavant, et avait accepté que ses découvertes soient utilisées gratuitement ! Même la prestigieuse revue *American Mathematical Monthly*, alors jeune, avait accepté deux de ses articles !
Heureusement, ce projet, qui faillit être adopté, fut repoussé finalement car on considérait alors que la loi ne devait pas décider de la vérité scientifique... encore heureux...

Après la renaissance

La démonstration de l'irrationnalité en *1761* puis de la transcendance en *1882* ont tout de même, à l'exception donc de ce farfelu de l'Indiana, miné les espoirs des amateurs et mathématiciens de proposer une valeur exacte pour *Pi*. A ce moment, les amusements vont commencer puisque l'on va rechercher des approximations rationnelles ou irrationnelles de *Pi* sous une forme simple. Et l'imagination et la patience des mathématiciens est fertile !
Jugez plutôt :

Quelques approximations :

Formules	Valeur approchée	Décimales c
$\left(1+\frac{1}{\pi}\right)^{\pi+1}$	*3,1409*	*2*
Approximation de Kochansky		
$\sqrt{\frac{40}{3}-\sqrt{12}}$	*3,141533*	*4*
Approximations de Ramanujan		
$\frac{6}{5}\phi^2=\frac{3}{5}\left(3+\sqrt{5}\right)=\frac{6}{5}\left(1+\phi\right)$	*3,14164*	*3*
$\frac{19\sqrt{7}}{16}$	*3,14182*	*3*
$\frac{7}{3}\left(1+\frac{1}{5}\sqrt{3}\right)$	*3,141623*	*3*
$\frac{9}{5}+\sqrt{\frac{9}{5}}$	*3,14164*	*3*
$\left(9^2+\frac{19^2}{22}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(102-\frac{2222}{22^2}\right)^{\frac{1}{4}}$	*3,14159265258*	*8*
$\left(97+\frac{1}{2}-\frac{1}{11}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(97+\frac{9}{22}\right)^{\frac{1}{4}}$	*3,14159265258*	*8*
$\frac{63}{25}\left(\frac{17+15\sqrt{5}}{7+15\sqrt{5}}\right)$	*3,1415926538**0***	*9*
$\frac{355}{113}\left(1-\frac{0,0003}{3533}\right)$	*3,14159265358979432*	*14*
$\frac{12}{\sqrt{130}}\ln\left[\frac{\left(3+\sqrt{13}\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{10}\right)}{2}\right]$	*3,14159265358979265*	*14*
$\frac{24}{\sqrt{142}}\ln\left[\frac{\sqrt{10+11\sqrt{2}}+\sqrt{10+7\sqrt{2}}}{2}\right]$	*3,14159265358979312*	*15*
$\frac{12}{\sqrt{190}}\ln\left[\left(3+\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{10}\right)\right]$	*3,1415926535897932384190*	*19*
$\frac{12}{\sqrt{310}}\ln\left[\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}{4}\left(5+2\sqrt{10}+\sqrt{61+20\sqrt{10}}\right)\right]$	*3,1415926535897932384626422088*	*23*

A noter que Ramanujan (1913) et Olds (1963) ont donné une justification géométrique de l'approximation 355/113. Gardner (1966) s'est occupé de celle de $3+\frac{16}{113}$. Dixon (1991) s'est quant à lui intéressé à $\sqrt{4+[3-\tan(30°)]^2}$ et $\frac{6}{5}\phi^2 = \frac{3}{5}(3+\sqrt{5}) = \frac{6}{5}(1+\phi)$.

Curiosités

Toutes les formules précédentes sont en elles-même des bizarreries, puisqu'il suffit de retourner la formule pour qu'une expression incluant *Pi* donne presque un entier ou une fraction rationnelle ou irrationnelle.

L'exemple le plus fameux est celui des expressions de Roy Williams en $e^{\pi\sqrt{n}}$ avec n entier naturel :
Pour certaines valeurs de *n* (notamment parmi les nombres de Heegner *1,2,3,7,11,19,43,67* et *163*), on trouve presque un entier :

n	Valeur de $e^{\pi\sqrt{n}}$
25	*6635623,999341134233266067*
37	*199148647,999978046551856766*
43	*884736743,999777466034906661*
58	*24591257751,999999822213241469*
67	*147197952743,999998662454224506*
74	*545518122089,999174985664301733*
148	*39660184000219160,000966674358575246*
163	*262537412640768743,999999999999250072*
232	*604729957825300084759,999992171526856431*
268	*21667237292024856735768,000292038842412959*
522	*14871070263238043663567627879007,999848772648279480*
652	*68925893036109279891085639286943768,000000000163738644*
719	*3842614373539548891490294377805829192,999987249566012187*

En *1975*, nous raconte *le Fascinant Nombre Pi*, Martin Gardner avait utilisé le cas *n=163* pour faire un poisson d'avril en avançant que $exp(\pi 163^{1/2})$ était un entier, ce qui, à l'époque, n'était pas facile à contredire ! En fait, ce cas particulier extraordinaire proviendrait du fait que le corps de nombres algébriques engendré par $163^{1/2}$ possède une propriété de factorisation unique, les nombres de Heegner ayant des qualités arithmétiques particulières.

Une autre curiosité est le nombre :

$e^{\pi} - \pi \approx 19,999099979$ donc $(\pi + 20)^{i} = -0,9999999992 - 0,0000388927i \approx -1$

soit encore $\cos(\ln(\pi + 20)) = -0,9999999992$

et $\cos(\pi\cos(\pi\cos(\ln(\pi + 20)))) \approx -1 + 3,9321609261.10^{-35}$

Moins de *1* millième d'erreur avec *20* pour un nombre aussi simple, voilà qui est étonnant, n'est-ce pas ?

Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr