Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr

Alexander Aitken
(1895 - 1967)

Une formule remarquable

Soit $(x_n)_{n\in N}$ *une suite convergeant vers* $\bar{x}$. *Alors la suite* $(t_n)_{n\in N}$

définie par $\forall n \in N \quad t_n = \dfrac{x_n x_{n-2} - x_{n-1}^2}{x_{n-2} - 2x_{n-1} + x_n} = x_n - \dfrac{(x_n - x_{n-1})^2}{x_{n-2} - 2x_{n-1} + x_n}$

converge vers $\bar{x}$ *plus rapidement que* $(x_n)_{n\in N}$

Tranches de vie

Voilà un homme bien singulier... et trop méconnu... J'espère que ce site permettra de faire connaître un peu mieux sa formidable formule d'accélération de la convergence, le *Delta2* !
Mais plongeons plutôt dans le récit de l'histoire de ce mathématicien peu commun :
Alexander Aitken est né en *1895* en Nouvelle-Zélande. Etudiant les langues et les mathématiques à partir de *1913*, il est blessé à la bataille de la Somme pendant la première guerre mondiale. Très marqué par cet événement, il rejoint Edimbourg en Ecosse après *3* mois d'hôpital. Doté d'une mémoire extraordinaire (il connaît tout de même *2000* décimales de *Pi* et est capable de donner la décimale à la *n*-ième place !), il met au point le fameux *Delta2* accélérant de façon optimale les suites. Mais cette fameuse mémoire lui rappelle trop souvent la bataille de la Somme et le traumatise. Il écrit alors ses mémoires mais celles-ci ne contribuent qu'à aggraver sa relative folie mentale et il décède finalement en *1967*.

Autour de π

Le *Delta2* accélère, on l'a dit, de façon optimale certaines suites. Il est conçu pour fonctionner au mieux avec les suites géométriques. Avec celles-ci, il donne directement la limite au bout de *3* itérations, sinon il tente de deviner la limite de cette suite. Si il ne la trouve pas, il accélèrera en tout cas la convergence.
Ses propriété sont assez extraordinaires, prenons par exemple le

développement limité de

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$$

valable sur *]-1,1]* comme chacun sait. Si l'on fait *x=2*, la série va diverger, bien sûr. Eh bien ce cher *Delta2* va le faire converger pendant quelque temps!!! Regardez plutôt :
ln(3)=1,0986...
Avec la série au rang *8*, on a *-19,31* (!)
Avec le *Delta2* itéré *2* fois, au rang *8*, on a *1,0979*
Après on recommence à s'éloigner de la vraie valeur. Mais que des valeurs complètement fausses dans la série donnent une bonne valeur avec le *Delta2*, c'est assez fabuleux, n'est-ce pas ?
En général, le *Delta2* accélère toutes les suites dont le rapport de deux écarts consécutifs converge vers une limite non nulle comprise entre *-1* et *1*, ce qui est bien sûr le cas des suites géométriques.
Le *Delta2* d'Aitken est très instable numériquement car le numérateur et le dénominateur sont proches de *0* et il faut donc calculer avec un bon paquet de décimales ! On utilisera de préférence le second membre de la formule, plus stable...

Démonstration

Formellement, si l'on construit t_n à partir de x_n, cette dernière convergeant vers L, on dit qu'il y a accélération de la convergence si on a :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{t_n-L}{x_n-L}=0$$

ce qui, intuitivement, se comprend fort bien...
Nous allons construire le *Delta2* et montrer qu'il vérifie bien cette propriété...
Dotons nous donc d'une suite x_n convergeant vers l avec une erreur

$e_n=x_n-L$ vérifiant $\lim_{n\to\infty}\frac{e_{n+1}}{e_n}=e\neq 0$ (1)

Nous allons construire une suite t_n à partir de x_n qui convergera plus vite vers sa limite. Ca n'est pas très long, et sacrément constructif vous verrez !

Construction :

Supposons pour cela que (1) est exact pour tout n (sans passage à la limite...) c'est à dire que $e_{n+1}=Ae_n$ (2)

*Or, on a $e_n=x_n-L$ par définition donc immédiatement, on obtient :

$$x_{n+2}-x_{n+1}=A.(x_{n+1}-x_n)\ (3)$$

*Posons maintenant $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$. (4)

D'après (2) et la définition de e_n, il vient $x_{n+1} - L = A(x_n - L)$ et donc

$L(1-A) = x_{n+1} - Ax_n$ et enfin :

$$L = \frac{x_{n+1} - Ax_n}{1-A} = x_n - \frac{\Delta x_n}{1-A} \quad (5)$$

*Calculons $\Delta^2 x_n = \Delta(\Delta x_n) = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n$. (6)

Or, on a $1-A = 1 - \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n} = \frac{2x_{n+1} - x_n - x_{n+2}}{x_{n+1} - x_n}$ donc, on en déduit :

$$L = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}$$

Mais puisque l'hypothèse de départ (1) n'est vraie qu'à la limite, on introduit une nouvelle suite :

$$t_n = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n} \quad (7)$$

avec t_n tendant vers L en l'infini

Preuve du théorème :

En bons architectes, après avoir construit cette suite, vérifions qu'elle tient debout et converge effectivement plus rapidement !
Puisque l'on n'est plus à la limite, posons $e_{n+1} = (A + \beta_n)e_n$ où β_n tend vers 0

*Un petit calcul rapide donne :

$$\Delta e_n = x_{n+1} - L - x_n + L = \Delta x_n$$

$$\Delta^2 e_n = e_n + 2 - 2e_{n+1} + e_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = \Delta^2 x_n$$

Exprimons donc Δe_n et $\Delta^2 e_n$ ce qui donnera Δx_n et $\Delta^2 x_n$:

*D'une part, $e_{n+2} = (A + \beta_{n+1})e_{n+1} = (A + \beta_{n+1})(A + \beta_n)e_n$

et donc

$$\Delta^2 e_n = e_{n+2} - 2e_{n+1} + e_n = (A + \beta_{n+1})(A + \beta_n)e_n - 2(A + \beta_n)e_n + e_n = (A-1)^2 e_n + \beta_n' e_n$$

où $ß_n'=A\,ß_n+A\,ß_{n+1}+ß_{n+1}\,ß_n-2ß_n$ tend vers 0 en l'infini

*D'autre part,

$$\Delta e_n=e_{n+1}-e_n=(A+ß_n)e_n-e_n=(A-1+ß_n)e_n$$

On remplace maintenant dans (5) et on obtient :

$t_n=x_n-\dfrac{(A-1+ß_n)^2 e_n^2}{\left((A-1)^2+ß_n'\right)e_n} \Leftrightarrow t_n-L=x_n-L-\dfrac{(A-1+ß_n)^2 e_n}{(A-1)^2+ß_n'}$ et en divisant par $x_n-L=e_n\#0$:

$$\frac{t_n-L}{x_n-L}=1-\frac{(A-1+ß_n)^2}{(A-1)^2+ß_n'}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0 \quad car \quad \lim_{n\to\infty} ß_n=\lim_{n\to\infty} ß_n'=0$$

et le théorème est bien démontré, il y a accélération de la convergence !

Il ne reste qu'à exprimer Δx_n et $\Delta^2 x_n$ dans t_n comme au (4) et (6) pour retrouver la formule du *Delta2* d'Aitken ! Après cette démo, j'espère qu'il n'aura échappé à personne la provenance du nom *Delta2* de la méthode !

Avec la participation de David Jelgersma

Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr