Histoire et recherche contemporaine sur le nombre π

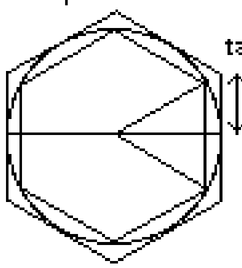
Boris Gourévitch
Responsable : Bernard Delyon
--
Séminaire de DEA 2000-2001

Introduction :
La prise de conscience du rapport constant du périmètre d'un cercle sur son diamètre date de la civilisation des Babyloniens et Egyptiens autour de 2000 av. J.C. Depuis cette époque, les mathématiciens n'ont eu de cesse de construire des procédés de calcul des décimales de ce nombre, si utile dans de nombreuses applications d'abord quotidiennes, physiques, puis purement mathématiques. Malgré des notations et connaissances mathématiques pour le moins rudimentaires jusqu'à la renaissance, les mathématiciens ont rivalisé d'ingéniosité géométrique et analytique, ouvrant le plus souvent la porte de théories passionnantes comme le calcul infinitésimal, l'étude aléatoire des nombres, les équations modulaires, etc… C'est en cela que la constante Pi se retrouve au centre des mathématiques et apparait dans pratiquement toutes les branches de cette science.
Nous allons ici présenter brièvement quelques moyens de calcul et théories connexes parmi les plus célèbres qui ont émaillé l'histoire du nombre Pi. Les deux premières parties consacrées aux mathématiques jusqu'au XIXe siècle seront un survol, tandis que nous nous arrêterons plus particulièrement sur les techniques relevant du XXe siècle.

1. Antiquité - Moyen-âge : La géométrie triomphante

1.1 Méthode d'Archimède

La première évocation connue du nombre Pi (bien sûr pas dans cette notation, qui date de 1706 et Jones) remonte au papyrus de Rhind (1800 av J.C.). Le scribe Ahmès propose simplement d'assimiler le cercle à un carré de côté 8/9*diamètre. Cela donne $\pi=(16/9)^2=3.1605\ldots$ en notation moderne. Cette précision, pour les égyptiens qui calculent en fractions de dénominateur 1, est la meilleure possible.
Les Babyloniens obtiennent eux *3.125* par leurs calculs en fractions *1/60*.
Plusieurs centaines d'années plus tard, l'idée célèbre d'Archimède repose sur l'évidence géométrique. Elle consiste à remarquer que le polygone régulier s'apparente presque à un cercle. En partant d'un carré, Archimède propose alors un algorithme de calcul du périmètre du polygone à 2^n côtés en fonction de celui du polygone à 2^{n-1} côtés. C'est sans doute le premier processus itératif de l'histoire. Il inscrit un polygone dans le cercle (le périmètre sera donné par des sinus) et circonscrit un polygone (le périmètre sera donné par des tangentes) au cercle. Au bout de quelques itérations, les deux polygones à 96 côtés lui donnent la fameuse approximation :



$$3+\frac{10}{71} < \pi < 3+\frac{1}{7}$$

En notations modernes, cela revient à calculer *sin(x/2)* en fonction de *sin(x),* de même pour la tangente :

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\sin^2(x)}\right)}$$

Et puisque $6.2^n \sin\left(\frac{\pi}{6.2^n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \pi \xleftarrow{n\to\infty} 6.2^n \tan\left(\frac{\pi}{6.2^n}\right)$

On obtient l'algorithme suivant :

$$U_0 = \frac{1}{2} \qquad V_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$U_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-U_n^2}\right)} \qquad V_{n+1} = \frac{-1+\sqrt{1+V_n^2}}{V_n}$$

$$6.2^n U_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi \qquad 6.2^n V_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

Cues (1401-1464) en donnera une version plus simple. Notons qu'Archimède ne connait pas la trigonométrie, ses calculs sont donc abominables !
A cette époque, le concept de constante n'est pas encore clair. On ne prend pas vraiment en compte le rapport du périmètre sur le diamètre, mais l'on considère plutôt que l'on peut calculer le périmètre à partir d'un diamètre. On ne sait pas vraiment si les Egyptiens et Babyloniens tiennent leurs valeurs pour exactes, mais il apparaît clair qu'Archimède sent bien la difficulté de trouver une valeur véritable pour cette constante toujours sans nom…

1.1 Variations de Viete et Descartes

L'idée fondamentale développée par Archimède va prédominer jusqu'à l'invention de l'analyse différentielle par Leibniz et Newton vers la fin du XVIIe siècle.
En attendant cette époque, on peut citer quelques variations de cette idée qui paraissent naturelles :

* Viete (1540-1603) abordera le problème par le rapport des aires au lieu des périmètres, ce qui lui donne le premier produit infini concernant Pi. Les problèmes de convergence ne sont pas vraiment d'actualité, mais l'infini potentiel apparait de plus en plus souvent de cette manière.
* Descartes (1596-1650) prend le problème à l'envers. Au lieu de considérer un diamètre fixé et calculer le périmètre, il considère un périmètre de polygone fixé et évalue le diamètre de la figure ainsi constituée.
Ces 3 méthodes ont des convergences linéaires, c'est à dire que le nombre d'itérations lancées et le nombre de décimales obtenues est proportionnel, à peu près 3n/5 décimales obtenues pour n itérations dans le cas d'Archimède.

2 XVIIe-XVIIIe siècles : Analyse différentielle et intégrale

2.1 De la géométrie à l'analyse

L'abandon des méthodes géométriques pour calculer Pi est très lent et continu.
Les idées de Wallis (1616-1703) et plus généralement celles de son époque consistent à lier des considérations géométriques à des calculs d'intégrales.
Par exemple, connaissant les intégrales $I_{2n} = \int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{2n} dx$ qui peuvent se mettre sous la forme de produits, il conjecture qu'il existe K tel que l'on peut compléter (interpoler dans le texte original) les I_{2n} par des I_n :

$I_0 = 0\,,\; I_1 = \frac{K}{2}\,,\; I_2 = \frac{2}{1}\frac{1}{3}\,,\; I_3 = \frac{1}{2}\frac{3}{4}K\,,\; I_4 = \frac{2}{1}\frac{4}{3}\frac{1}{5}\ldots$

Et il trouve un encadrement tel que $K = \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}\frac{8}{7}\ldots$

Or il sait que $I_1 = \frac{\pi}{4}$ puisque c'est l'intégrale de la courbe représentant le quart de cercle de rayon 1, d'où il en tire son célèbre produit infini :

$$\pi = 2\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1}$$

Tout ceci relève de la continuité des relations algébriques, puisque Wallis commence ainsi à manipuler des exposants fractionnaires avec les I_n.
La démarche de Newton sera similaire puisqu'il trouvera un développement en notations modernes de l'*Arcsin*. On se place donc désormais dans l'interprétation analytique de fonctions géométriques.
Signalons également le principal progrès depuis les algorithmes de type Archimède, survenu avec la découverte du développement de la fonction Arctan par Grégory (1638-1675) :

$$\forall x \in [-1;1],\; Arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

Gregory l'a découvert en montrant par des méthodes géométriques assez longues que la valeur moyenne sur [0;x] de $\frac{1}{1+x^2}$ était $\frac{Arctan(x)}{x}$, résultat que l'on connait aujourd'hui par simple intégration. Celui-ci est surtout important puisqu'il permet désormais au moyen de développements d'*Arctan(1)* de trouver des séries rationnelles donnant Pi et à la convergence assez intéressante. Ainsi la plus célèbre est certainement celle de Machin (1706) qui donne

$$\frac{\pi}{4} = Arctan(1) = 4Arctan\left(\frac{1}{5}\right) - Arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

Cette méthode de calcul de Pi, au développement utilisé près, prévaudra jusqu'aux années 80 ! Cela montre la puissance du procédé et en même temps le peu de progrès pratiques réalisés en presque 3 siècles…
La valeur de la série en $x=1$ donne la série simple publiée par Leibniz

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

d'où l'on peut tirer assez facilement (comme du reste depuis la formule de Wallis également) l'expression de Pi sous forme de fraction continue publiée par lord Brounker

$$\pi = 4\cfrac{2}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\dots}}}}$$

Ces relations expliquent la médiocre rapidité de convergence de ces formules.

2.2 Les séries Eulériennes et l'extension à ζ

Si Euler mérite à lui seul un paragraphe, c'est que son infatigable investigation a fourni de nombreux résultats concernant Pi. Plus généralement, c'est une des premières fois que Pi est pratiquement coupé de son origine géométrique.
Euler excelle dans les généralisations de résultats ou fonctions connues. Par exemple, bien que la convergence ait été établie par Bernoulli, c'est Euler qui découvrira le résultat

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

en utilisant une astuce assez peu rigoureuse :
Se basant sur la théorie des équations algébriques, Euler savait que la somme des inverses des racines de $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+1=0$ vaut $-a_1$.
Considérant alors le développement de

$$\frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} = 1-\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{5!}-\frac{x^3}{7!}+\frac{x^4}{9!}-...$$

il sait grâce à la périodicité de sinus que le membre de droite s'annule pour $x=\pi^2$, $4\pi^2$, $9\pi^2$, $16\pi^2$... Euler se dit alors que la propriété qui est vraie pour un polynôme fini doit l'être pour un polynôme infini et il en déduit le résultat.
La généralisation pour tout ordre de cette série donne la fameuse formule faisant apparaitre la fonction ζ pour les entiers pairs :

$$\zeta(2n)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}=\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}Ber_{2n}$$

où Ber_{2n} sont les nombres de Bernoulli.
On peut retrouver les formules d'Euler par les décompositions de fonctions simples en séries de Fourier pour la plupart d'entre elles.
Un paradoxe intéressant est de constater que le développement de l'analyse, après la découverte des formules de type Machin, ne permettra cependant pas de découvrir de formules véritablement rapides jusqu'au XXe siècle. Néanmoins, la compréhension de la place du nombre Pi dans les mathématiques s'en trouvera grandement renforcée.
On peut citer par exemple la formule d'Euler $exp(i*\pi)=-1$ considérée comme extraordinaire à l'époque, et sans doute assez mal comprise.

2.3 Equivalences asymptotiques

Une autre des apparitions "soudaines" de Pi concerne les équivalences asymptotiques dont la plus célèbre est certainement celle de Stirling (1692-1770), découverte en fait par Moivre (1667-1754) :

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

et qui permet d'isoler Pi. La démonstration peut passer par des méthodes classiques de convergence de suites ou bien plus finement par l'expression générale de la différence entre une intégrale et une série au moyen de termes comprenant les nombres de Bernoulli, ceci appliqué à la fonction *Ln*.
A noter que la formule de Wallis, qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{2^{4n+2}\, n(n!)^4}{((2n+1)!)^2} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

est immédiate avec le résultat de Moivre/Stirling en faisant le rapport des équivalences pour $(2n)!$ et $(n!)^2$.

2.4 Premiers résultats sur les propriétés de Pi

Si le XVIIIe siècle fut prolifique en ce qui concerne les formules numérique concernant Pi, le XIXe siècle sera pour Pi, comme dans bien des domaines des mathématiques, celui des premières questions sur la nature plus profonde des objets utilisés.
Ainsi, la découverte de l'irrationnalité en 1776 par Lambert avait déjà consacré Pi comme un nombre un peu moins simple qu'il n'y parait. Mais c'est surtout la démonstration de la transcendance de *e* en 1873, suivie de celle de Pi en 1882 qui consacrera le début du mystère entourant la véritable nature de Pi. En passant, ce résultat de Lindemann (1852-1939) mettra un terme à l'un des plus vieux problèmes mathématiques datant de l'antiquité en fournissant une réponse négative à la quadrature du cercle.
S'ouvre alors une période moins "médiatique" pour Pi, les mathématiciens étant affairés autour de la nouvelle théorie des ensembles de Cantor et Dedekind, de la théorie des groupes, et plus généralement des 23 problèmes de Hilbert posés en 1900. Le lien avec les intégrales elliptiques, pourtant également à la mode, ne sera réalisé que par un génie venu de l'Inde au début du siècle : Ramanujan

3 Trois axes de recherche contemporains

3.1 Théorie des équations modulaires

3.1.1 Les algorithmes

Srinivasa Ramanujan (1887-1920) est un autodidacte Indien passionné par la constante Pi et qui va mettre son extraordinaire génie intuitif au service de la découverte d'algorithmes et séries rapides découlant de la théorie des équations modulaires. En collaboration avec Hardy (1877-1947) qui avait seul su deviner les capacités de Ramanujan, il découvrit de très nombreux résultats en analyse diophantienne. Cependant, sa façon très inhabituelle de réfléchir et d'écrire les mathématiques a fourni plusieurs carnets remplis de notations non standards et d'absences de démonstrations. Le déchiffrement s'est poursuivi tout au long de ce siècle, par Bruce Berndt et les frères Borwein notamment. On peut le considérer comme étant à la base de pratiquement tous les algorithmes construits au XXe siècle. Il a fourni notamment par exemple la célèbre série (1914) :

$$\pi = \frac{9801}{\sqrt{8}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4\, 396^{4n}} \right)^{-1}$$

dont la démonstration ne peut guère malheureusement s'expliquer en quelques mots mais qui est un cas particulier de la relation générale suivante :

$$\pi = \sqrt{-j(t)}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(6n)!\,(a(t)+n.b(t))}{(n!)^3(3n!)\,j(t)^n}\right)^{-1} \quad où \;\; b(t)=\sqrt{t(1728-j(t))},$$

$$a(t)=\frac{b(t)}{6}\left(1-\frac{E_4(t)}{E_6(t)}\left(E_2(t)-\frac{6}{\pi\sqrt{t}}\right)\right),\;\; j(t)=\frac{1728\left(E_4(t)\right)^3}{\left(E_4(t)\right)^3-\left(E_6(t)\right)^2}$$

et les séries de Eisenstein :

$$E_2(t)=1-24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n.q^n}{1-q^n},\;\; E_4(t)=1+240\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3q^n}{1-q^n}$$

$$E_6(t)=1-540\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5q^n}{1-q^n}\quad et\;\; q=-e^{-\pi\sqrt{t}}$$

Reprenant l'idée des équations modulaires étudiées par Ramanujan, les frères Borwein ont mis au point une technique permettant l'élaboration d'algorithmes très rapides tel (1) :

$$y_0=\frac{1}{3},\;\; y_{n+1}=\frac{1-\sqrt{1-y_n^2}}{1+3\sqrt{1-y_n^2}},\;\alpha_0=\frac{1}{3},\;\alpha_{n+1}=(1+3y_{n+1})\alpha_n-2^n\,y_{n+1}$$

$$\beta_n=\frac{1}{\alpha_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\pi$$

qui repose sur une équation d'ordre 2 et possède une convergence quadratique. Plus généralement, la convergence est n-ique pour un algorithme d'ordre n et les Borwein ont prouvé qu'il existait un algorithme de calcul de π pour chaque ordre.

Précisons en deux mots le principe :
On introduit la fonction classique Eta de Dedekind :

$$\eta(\tau)=q^{\frac{1}{24}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^n\right)\quad où\;\; q=e^{2i\pi\tau}$$

Cette fonction Eta est intéressante car elle possède de nombreuses propriétés de réécriture ou d'équations fonctionnelles telles que :

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{kj}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{\frac{3kn(n-1)}{2}}\qquad \text{(Euler)}$$

ou encore

$$\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right)=\sqrt{\frac{\tau}{i}}\,\eta(\tau)$$

Ces combinaisons permettent l'étude de fonctions complexes telles que les fonctions α_p des Borwein définies par :

$$\alpha_p(r)=\frac{\left(\frac{1}{\pi}-\frac{q^{8\sqrt{r}}\dot{B}(q)}{(p-1)\sqrt{p}B(q)}\right)}{A_p(r)}\quad avec\quad A_p(r)=q\left(\frac{24}{p^2-1}\right)\left[\frac{\dot{C}_p(q)}{C_p(q)}-\frac{\dot{B}_p(q)}{B_p(q)}\right],$$

$$B_p(r)=\frac{\eta^p(\tau)}{\eta(p\tau)},\ C_p(r)=\frac{\eta^p(p\tau)}{\eta(\tau)}\quad où\ \tau=\frac{i\sqrt{r}}{rp}\quad soit\ \ q=e^{-2\pi\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{p}}}$$

Cette définition est très lourde mais les propriétés successives de la fonction Eta vont permettre le plus souvent de simplifier cette expression, car les relations entre les fonctions B et C donnent souvent des formules très simples, de fractions et de racines d'entiers.
D'autre part, on peut vérifier assez rapidement que lorsque *r* tend vers l'infini et *q* tend vers *0*,

on a $\lim_{r\to\infty}\alpha_p(r)=\frac{1}{\pi}$

Comme dans la méthode d'Archimède, et plus généralement dans les algorithmes basés sur des itérations de fonctions dépendant d'une constante, ici π, le principe est maintenant de trouver une valeur de α_p indépendante de π et une relation de récurrence. Ces deux problèmes seront résolus au bout de plusieurs pages d'équations fonctionnelles sur la fonction Eta et les séries d'Eisenstein par :

$$\alpha_p\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r}\left(\frac{p+1}{3\sqrt{p}}\sqrt{r}-\alpha_p(r)\right)$$

ce qui fournit $\alpha_p\left(\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{3}$, et surtout :

$$\alpha_p\left(p^2r\right)=\alpha_p(r)m_{p,p}(r)+\frac{\sqrt{rp}}{3}\left(1-m_{p,p}(r)\right)\quad où\ \ m_{p,p}(r)=\frac{A_p(r)}{A_p(p^2r)}$$

La quadraticité de la convergence provient du fait que la relation est une équation en p^2 fonction d'une équation en *p*. Cela permettra de poser plus tard $p=4^n$ par exemple pour l'algorithme.
Le terme en $m_{p,p}$ est encore gênant, il faudrait pourvoir le calculer ou trouver un algorithme permettant son évaluation.
C'est maintenant qu'interviennent les fameuses équations modulaires. Pour comprendre rapidement ce qu'est une équation modulaire, on introduit les Thêta fonctions de Jacobi :

$$\theta_2(q)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2},\ \theta_3(q)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}q^{n^2},\ \theta_4(q)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{n^2}$$

de valeurs respectives 0, 1, 1 en 0, et qui possèdent des propriétés particulières de combinaisons sous forme d'équations fonctionnelles les reliant, elles et les puissances de *q*.
Par exemple, une équation modulaire célèbre de degré 7 est :

$$\sqrt{\theta_3(q)\theta_3(q^7)}-\sqrt{\theta_4(q)\theta_4(q^7)}=\sqrt{\theta_2(q)\theta_2(q^7)}\quad \text{([2] p112)}$$

Ici, on s'intéresse à un algorithme d'ordre 2, c'est à dire que l'on va considérer maintenant $p=2$

soit $q=e^{-2\pi\frac{\sqrt{r}}{2}}$. On introduit

$$a(q)=\theta_3^4(q)+\theta_2^4(q),\ \ b(q)=\theta_4^4(q),\ \ c(q)=2\theta_2^2(q)\theta_3^2(q)$$
$$s(q)=\frac{c(q)}{a(q)},\ \ s^*(q)=\frac{b(q)}{a(q)}$$

On arrive à montrer toujours grâce aux liens entre la fonction Eta et les Thêta fonctions que $m_{2,2}(r)=1+3s(q^2)$ ce qui fournit déjà $s(r=2)=\frac{1}{3}$.
Les équations modulaire d'ordre 2, et c'est là le centre de la démarche, sont les relations

$$s^2+s^{*2}=1$$

(valable plus généralement à l'ordre *p*), et

$$4=\left(1+3s(q^2)\right)\left(1+3s^*(q)\right)$$

Il est facile de montrer ensuite qu'en définissant
$y_n=S\left(4^n\frac{1}{2}\right)$ *où* $S(r)=s(q)$, *et* $\alpha_n=\alpha_2\left(4^n\frac{1}{2}\right)$ on obtient

$$s_{n-1}^*=\sqrt{1-s_{n-1}^2},\ 4=\left(1+3s(q^2)\right)\left(1+3s^*(q)\right)\Rightarrow s_n=\frac{1-\sqrt{1-s_{n-1}^2}}{1+3\sqrt{1-s_{n-1}^2}}$$

et l'algorithme (1) suit.
Tout se passe comme on l'a déjà dit plus haut dans la relation entre une équation en q^2 (terme d'indice *n*) et une équation en q (terme d'indice *n-1*).
Le livre des Borwein [1] est remarquable pour une introduction à ce domaine. Il généralise la méthode découverte par Gauss en 1800 qui offrait le résultat de l'algorithme de moyenne arithmético-géométrique sous forme d'une intégrale elliptique. Historiquement, le lien avec les Thêta fonctions s'est naturellement fait lorsque l'on a remarqué entre autre par exemple que θ_3^2 et θ_4^2 vérifiaient la même relation pour *q* et q^2 que la définition de la moyenne arithmético-géométrique pour les indices *n* et *n+1*. Les intégrales de première et de seconde espèce s'expriment donc comme des Thêta fonctions. A partir de là, il faut trouver des valeurs singulières (comme celle qui conduit à $\alpha_p\left(\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{3}$) pour lancer les algorithmes. Ramanujan était particulièrement fort dans ce domaine.

Un des grands problèmes des séries est qu'elles requièrent souvent un temps de calcul augmentant sensiblement avec le nombre de décimales. En effet leur convergence linéaire implique notamment que le nombre de termes à prendre en compte avant d'arriver par exemple à un doublement du nombre de décimales calculées augmente considérablement.
Les algorithmes des Borwein, ou celui de Salamin résolvent ce problème. De plus, la transformée de Fourier rapide est une méthode moderne de multiplication des grands nombres ne requiérant qu'une complexité en *n*ln(n)*ln(ln(n))*. Grâce à la méthode de Newton par exemple, on montre aussi que la division et l'extraction de racines ne sont guères plus compliquées que la multiplication. Au final, on peut évaluer *n* décimales aujourd'hui en un temps quasi-linéaire, plus précisément d'environ $n*ln(n)^4$.

3.1.2 Une propriété numérique en découlant

Ramanujan avait remarqué que $e^{\pi\sqrt{163}}$ est un entier à 10^{-12} près ce qui est vraiment étonnant. Son raisonnement par la théorie des fonctions modulaires ne fut percé que plusieurs dizaines d'années plus tard.

Il repose sur la même fonction j présentée plus haut où l'on prend tout d'abord $q = e^{2i\pi t}$ (*t* complexe). Cette fonction est modulaire, c'est à dire qu'elle est définie sur le demi-plan complexe supérieur, qu'elle admet une limite en $i\infty$, qu'elle est méromorphe et surtout invariante par la transformation $t \to \dfrac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}$ *où* $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix} = 1$ (*a, b, c, d* entiers).

On définit maintenant une relation d'équivalence sur les formes quadratiques $a.x^2+b.xy+c.y^2$ avec *a, b, c* dans $\mathbb{Z}$ et premiers entre eux ($a>0$ également).
Leur discriminant $d=b^2-4ac<0$ est donné.
On définit la relation ~ par $a.x^2+b.xy+c.y^2 \sim a'.x^2+b'.xy+c'.y^2$ si on peut passer d'une forme à l'autre par la transformation :

$$\begin{cases} x \to \alpha x+\beta y \\ y \to \gamma x+\delta y \end{cases} \text{avec } \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \quad \text{et } \begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix} = 1$$

Cette relation d'équivalence conserve le discriminant d. Le nombre de classes d'équivalences est noté *h(d)* et un célèbre théorème dû à Heegner (52), Baker et Stark (66) affirme que :

$$\left[d<0 \text{ et } h(d)=1\right] \Leftrightarrow \left[d \in \{-1,-2,-3,-4,-7,-8,-11,-19,-43,-67,-163\}\right]$$

Ces entiers sont appelés nombres de Heegner.
En outre, Weber a montré que :

$$\left[j\left(\frac{-b+\sqrt{d}}{2a}\right)\right] \Leftrightarrow \left[h(d)=1\right]$$

On obtient donc que $j\left(\dfrac{-1+i\sqrt{163}}{2}\right) \in$ ▬ .

D'autre part, en tant que fonction méromorphe, *j* admet un développement de Laurent en *q* qui donne :

$$j(t) = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + ..$$

Avec la valeur précédente $t = \dfrac{-1+i\sqrt{163}}{2}$, on obtient :

$$e^{\pi\sqrt{163}} = n - 196884e^{-\pi\sqrt{163}} + ... = n - 7.5 * 10^{-13} + ...$$

n entier, ce qui achève la démonstration.
L'approche algébrique montre que les entiers de Heegner sont très importants. Les corps quadratiques imaginaires engendrés comme $\mathbb{Q}\left(i\sqrt{163}\right)$ possèdent des propriétés de factorisation fascinantes. Par exemple, son nombre de classe est 1 ce qui est équivalent au fait que la décomposition en facteurs premiers est unique dans ce corps.

3.2 Propriétés aléatoires ou numériques de Pi

Le débat sur la caractère aléatoire du nombre Pi est plus important qu'il n'y parait. D'une part, une réponse pour ce nombre impliquerait sans doute l'apport d'une réponse pour bien d'autres constantes par les mêmes techniques. En outre, la compréhension des propriétés des nombres s'en trouverait grandement avancée.
Historiquement, les résultats d'irrationnalité et de transcendance de Pi tout d'abord découverts n'ont pas apporté de grandes révélations sur la répartition de ses décimales hormis le fait qu'elles n'étaient pas périodiques. On peut aller un tout petit peu plus loin en introduisant la notion de nombre de Liouville.
En 1851, Joseph Liouville montre que tous les nombres ne sont pas algébriques, et plus précisément que si x est irrationnel et racine d'une équation algébrique de degré *n*, alors il existe *C>0* tel que tout rationnel *p/q* vérifie :

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^n}$$

Intuitivement, cela signifie qu'un nombre irrationnel algébrique ne peut être approché de trop près par un rationnel. Un nombre irrationnel qui se laisserait approcher par des rationnels est alors transcendant.
On définit ainsi les nombres de Liouville par cette dernière propriété, c'est à dire que *x* est un nombre de Liouville (et donc transcendant) si pour tout *n* entier et *C>0*, il existe *p, q* tel que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{C}{q^n}$$

Une propriété assez amusante est que ce résultat décide de la tarnscendance de certains nombres contenant beaucoup de 0. Par exemple $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n^n}}$ est transcendant car grâce aux longues séquences de *0*, on peut l'approcher de plus en plus finement par des rationnels. On connait aussi *le* nombre de Liouville défini par des *0*, avec des *1* placés aux *n!* places.
La réciproque n'est pas vraie, c'est à dire que tous les transcendants ne sont pas des nombres de Liouville. Par exemple, les frêres Chudnovsky ont montré pour π que

$$\left| \pi - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^{14.65}}$$

pour *q* assez grand.
Ce qui implique notamment que l'on ne puisse pas trouver une infinité de fois "*15n*" zéros à partir du rang *n*, c'est à dire par exemple *15000* zéros à partir du rang *1000*. C'est tout de même une contrainte assez faible ! Cependant, cela montre tout de même que Pi n'est pas un nombre de Liouville et donc pas approchable de trop près par des rationnels.

A force de ne pouvoir éclaircir la nature de la répartition des décimales de Pi, l'idée qu'elles pouvaient être réparties de façon "aléatoires" a germé.
Pi n'a pourtant aucune raison d'être aléatoire puisque dans certaines représentations, Pi a une expression parfaitement déterminée. Par exemple la série d'Euler $\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} = \left(2 + \frac{1}{3}\left(2 + \frac{2}{5}\left(2 + \frac{3}{7}\left(2 + \frac{4}{9} \ldots \right)\right)\right)\right)$ montre que dans la base mobile à pas variable $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \ldots \right]$, Pi a une expression très simple *2,22222…*

Si l'on regarde les fractions continues régulières, on sait aussi que celle de *e* est parfaitement prévisible tandis que ce n'est pas le cas pour celle de Pi. Que doit-on en conclure ?
Et en premier lieu, qu'est-ce que veut dire être aléatoire pour un nombre ?

Pour bien comprendre l'état actuel des conjectures sur ces problèmes, il convient d'introduire quelques définitions :

Aléatoire :

Un nombre sera dit aléatoire si la taille du programme minimal générant *n* décimales du nombre est au moins de taille *n*. Intuitivement, cela signifie que l'on ne peut compresser l'information contenue dans ce nombre.

Plus précisément, cette approche est liée au fait que puisque la probabilité de tirer une suite précise de décimales est nulle, on ne peut facilement utiliser la théorie de la mesure. On peut par contre passer par la théorie de la calculabilité mise au point dans les années 40 par Gödel, Turing, Church et Kleene. Celle-ci indique que toutes les suites de nombres ne sont pas programmables, donc calculables par machine. A l'issue de ces travaux, d'autres menés par Kolmogorov, Solomonoff, Chaitin et Martin-Löf dans les années 60 ont précisé la définition d'un nombre aléatoire au sens de Martin-Löf comme un nombre ne possédant pas de propriété *exceptionnelle* que l'on puisse *effectivement vérifier*.

On retombe sur la théorie de la mesure en définissant une propriété exceptionnelle comme une propriété qui n'est presque sûrement pas vérifiée. Pour ne pas se faire piéger par des cas un peu spéciaux mais que l'on ne pourrait pas déceler, on rajoute la condition de vérification effective. Elle signifie que l'on peut vérifier la propriété par programme avec un risque de se tromper s'amenuisant avec le degré de vérification.

La définition précise et pénible est la suivante:

Une propriété P est *exceptionnelle* et *effectivement vérifiable* s'il existe un programme de test qui, pour tout entier *n* (correspondant au degré du test, en pratique un nombre *f(n)* de décimales), élimine certaines suites qui apparaissent satisfaire la propriété P. Le test, au niveau *n*, s'effectue en utilisant un nombre fini de chiffres de la suite, et est tel que les suites éliminées soient dans une proportion d'au plus 2^{-n}. Les suites qui sont toujours éliminées à partir d'un certain rang *n* doivent être exactement celles qui satisfont la propriété P.

Intuitivement, plusieurs remarques s'imposent :

- Le 2^{-n} assure que l'ensemble restant soit de mesure nulle
- La définition est très générale pour une propriété exceptionnelle. Car on pourrait par exemple définir la propriété exceptionnelle "être égal à Pi". Dans ce cas, Pi aurait une propriété exceptionnelle et ne serait donc pas aléatoire ! C'est dans ce cas la condition de vérification possible par programme qui sauve le tout. Cette condition va tout naturellement imposer de pouvoir vérifier en temps fini ou de lancer une boucle, bref de compresser la vérification, et c'est la base de la théorie de la complexité de Kolmogorov.
- La condition de vérification tempère donc la condition probabiliste qui se serait révélée inefficace car aboutirait à une définition vide.

Pour faire le lien avec la définition donnée au départ, on passe par la théorie de la compexité de Kolmogorov :

La complexité définie au sens de Kolmogorov pour un nombre mesure la taille du programme minimal permettant d'imprimer ce nombre. Une suite de 1 a une complexité bien sûr faible tandis qu'une suite delongueur 10^{13} don't le programme servant à l'imprimer a une taille supérieure ou égale à 10^{13} a une forte complexité et est totalement incompressible…

Le théorème remarquable démontré dans les années 70 indépendamment par Schnorr, Levin et le grand Chaitin est le suivant :

Une suite infinie de "*0*" et de "*1*" est aléatoire au sens de Martin-Löf si et seulement si elle est incompressible, c'est à dire si et seulement si il existe une constante *c* telle que la comprexité de Kolmogorov des *n* premiers chiffres de la suite est toujours plus grande que *n-c*.

La constante *c* sert à éviter les problèmes avec les débuts des séquences (par exemple commençant par une centaine de 1).

Si l'on doit retenir l'idée du paragraphe précédent c'est qu'aléatoire au sens mathématique signifie incompressible, ce qui intuitivement n'est pas absurde.

Avec cette définition, π n'est absolument pas aléatoire, puisque le simple fait que l'on puisse l'écrire sous formes de séries permet d'écrire un programme de taille inférieure à *n* pour

calculer *n* décimales (il existe notamment un programme en c comportant 158 caractères et fournissant 2400 décimales de Pi, on appelle ce genre de code des tiny-programs).
Une petite remarque complémentaire, cette définition montre aussi que les fonction random des calculateurs ne sont pas "aléatoires" au sens absolu.
De plus, les nombres aléatoires au sens de Martin-Löf sont forcément transcendants et normaux, terme que l'on va définir par la suite.
Enfin, de par sa définition avec les propriétés exceptionnelles, presque tous les nombres sont aléatoires au sens de Martin-Löf, même si ni les algébriques (d'ailleurs en nombre dénombrable) ni les nombres calculables (également en nombre dénombrables comme le nombre de programmes à cause des instructions) ne sont aléatoires !
On ne connait d'ailleurs que le seul nombre de Chaitin comme véritablement aléatoire (la probabilité qu'un ordinateur universel à programmes autodélimités s'arrête).
Si π n'est pas aléatoire au sens de Martin-Löf, il faut alors passer par des définitions d'autres propriétés un peu moins "aléatoires" sous peine de ne toujours rien savoir de Pi !

Nombre-univers :
Les nombres univers sont les nombres où chaque séquence de chiffres est présente. C'est le cas si chaque chiffre a une probabilité non nulle d'être tirée dans un suite infinie de chiffres tirés au hasard.
On ne sait pas démontrer si π est un nombre univers. On sait en revanche que presque tous les nombres sont des nombres univers, même si il en existe une infinité non dénombrable qui ne sont pas des nombres univers.
Un exemple trivial de nombre univers est le nombre de Champernowne qui vaut *0,123456789101112131415…* qui est la suite de tous les nombres entiers.
Sa propriété fascinante implique notamment que si Pi est un nombre univers, il contient en autres la version convertie en chiffres de la Bible, de sa propre biographie complète, sans compter les innombrables contenant des erreurs. On peut déjà trouver sur Internet des sites proposant de chercher sa date de naissance dans les décimales connues.
Certains nombres transcendants sont des nombres univers (nombre de Champernowne) d'autres non, par contre, on ne sait rien pour les nombres algébriques (irrationnels).

Equiréparti :
D'après la loi des grands nombres, pour une base *b* donnée, la fréquence des *0* dans une séquence de *n* chiffres tirés au hasard tend vers *1/b* lorsque *n* tend vers l'infini.
Réciproquement, si la fréquence de chacun des *b* chiffres d'un nombre est *1/b* alors on dit que le nombre est équiréparti (ceci pour une base *b*, ou bien pour toutes les bases *b*, la notation suivant).

Normal :
La normalité est une généralisation de l'équirépartition.
Un nombre est dit normal en base *b* si il est équiréparti en base *b* bien sûr, mais si en plus la fréquence des couples de chiffres est équirépartie, la fréquence des triplets également, etc…
Ainsi, en base 10 la fréquence du chiffre *2* doit être *1/10*, celle du couple *29* doit être *1/100*, celle de *356* doit être *1/1000*, etc…
Un nombre normal en base *b* est a fortiori équiréparti en base b tandis que l'exemple *1/3=0.010101010101…* en base 2 fournit un rationnel équiréparti en base 2, mais absolument pas normal en base 2. Un nombre normal en toute base est dit absolument normal.
La notion de normalité est la plus courante, c'est à dire que c'est souvent la propriété ultime que l'on cherche à démontrer pour un nombre. On suppose en effet en général pour les constantes les plus courantes (mais pas les plus triviales comme l'exemple précédent) qu'elles vérifient cette propriété. Emile Borel a d'ailleurs montré que presque tous les nombres sont absolument normaux.

On pourrait encore aborder le problème des nombres finiment définissables au moyen d'un système formel de notations et dans les axiomes ZF classiques. La défintion intuitive est assez claire et on se rend compte évidemment que π est finiment définissable, notamment grâce à ses développements en série infinie.

Quelques exemples

Le nombre de Champernowne est normal en base 10, donc équiréparti, et c'est par définition un nombre univers comme nous l'avons vu. Il est un démenti formel aux assertions impliquant l'aléatoire à partir de la normalité, puisque ce nombre possède clairement une structure identifiable ! On ne sait pas par contre s'il est normal dans les autres bases, ce qui est assez logique vu sa construction.
Copeland et Erdös ont montré que dans une certaine base *b*, les nombres s'écrivant $0,u_1u_2u_3u_4\ldots$ où u_n est une suite croissante d'entiers telle que $\forall \varepsilon > 0,\ u_n \leq n^{1+\varepsilon}$ à partir d'un certain rang sont normaux. Ainsi, *0.246810…, 0.510152025* (multiples de 5),
0.23571113 (suite des premiers) sont normaux.
On ne sait pas construire explicitement un nombre normal en toute base, même si le nombre de Chaitin est encore une fois normal en toute base.

Et π dans tout cela ?

Eh bien le résultat très décevant et en même temps prometteur est que l'on ne sait rien… Le problème principal est que les mathématiciens ne savent pas bien comment aborder le problème car π se dérobe à chaque fois qu'ils pensent avoir trouvé la solution.
Comme nous l'avons dit, les résultats d'irrationnalité et de transcendance n'indiquent pas grand chose sur la répartition des décimales de Pi.
Nous avons vu que les algorithmes des Borwein alliés aux techniques modernes de programmation (FFT) permettaient de calculer Pi en temps *n.log(n)* linéaire ce qui est un énorme progrès par rapport à précédemment. On peut imaginer aller plus loin et l'on se trouve alors devant la

Conjecture de Hartmanis et Stearns :
Tout nombre irrationnel calculable en temps linéaire (un temps *n* donne *n* décimales) est transcendant.

Il existe des résultats moins forts, par exemple celui de Loxton et Van der Poorten publié en 1988 qui indique qu'un nombre irrationnel dont les décimales sont définissables par un automate à nombre fini d'état (mémoire finie) est transcendant.
Ce n'est bien sûr pas le cas pour π.
Une autre approche passe par les formules BBP que l'on verra dans le paragraphe suivant.
Un résultat néanmoins tout à fait intéressant de Kannan, Lenstra et Lovasz (1986) concerne l'utilisation d'un nombre comme π à des fins de codage ou de générateur aléatoire.
Nous savons que π peut s'écrire comme la composition d'un algébrique par certaines fonctions, par exemple :
*π=2*Arcsin(1)=Arccos(-1)=-2i*Ln(i).* Plus généralement, pour les fonction *Arccos, Arcsin, Ln* et un algébrique *a*, on a le résultat suivant :
Si l'on connait un nombre *n* assez grand de décimales de *a*, le degré de l'équation minimale dont il est racine, ainsi que la taille maximale de ses coefficients, on peut reconstituer en temps polynômial l'équation, et ainsi reconnaitre le nombre en question (et donc continuer à calculer ses décimales). Une conséquence importante de ce résultat est que l'on ne doit pas utiliser les décimales de ces fonctions prises en *a* (et donc Pi) comme générateurs aléatoires, puisque l'on pourrait assez rapidement violer le code.

3.3 Formules BBP et polylogarithmes

En septembre 95, Bailey, Borwein et Plouffe trouvent la formule suivante :

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right)$$

Elle est extrêmement simple, la démonstration est évidente en passant par les intégrales et les séries, bref elle aurait pu être découverte bien avant. De plus, sa convergence est linéaire, bref le tout était de voir à quoi elle pouvait être utile.
En fait, on remarque que l'on a "presque" le développement d'un nombre (π ici) en base 16. Et ce presque va permettre d'évaluer le *n*-ième digit de π en base 16 sans connaitre les précédents, le tout en complexité *n*ln(n)* ! C'est une révolution dans le calcul des décimales et montre notamment que π appartient à la classe de Steven SC_2 qui regroupe les nombres dont on peut calculer les chiffres binaires en "temps polynômial" et en "espace *Ln*-polynômial" puisque cette formule permet de n'utiliser que des petits (tout est relatif) entiers. Plus généralement, π appartient en fait à la classe de Steven SC_b.

Précisons le principe de l'application de cette formule au moyen de l'exemple simple :

$$ln\left(\frac{9}{10}\right) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n}\frac{1}{n}$$

Connaitre le *1000*e chiffre décimal de cette série demande d'abord de pouvoir calculer par exemple le *1000*e chiffre décimal de $\frac{1}{10^{49}}\frac{1}{49}$.

Mais le 10^{1000}e chiffre de $\frac{1}{10^{49}}\frac{1}{49}$, c'est le 10^{951}e chiffre de $\frac{1}{49}$ en décalant les chiffres vers la droite. C'est aussi le premier chiffre après la virgule de $\frac{10^{950}}{49}$ toujours en décalant.

Ceci se résoud aisément par l'arithmétique des congruences modulo *49*. En effet, il suffit de calculer le reste *r* de la division euclidienne de 10^{950} par *49*. En calculant les restes pour des entiers plus petits et en les multipliant, on trouve le résultat :

Dans $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$, on a en effet $10^2=2$, $10^4=2*2=4$, $10^8=16$, $10^{16}=16^2=256=11$, etc…

Donc $10^{951} = 10^{2+2^2+2^4+2^5+2^7+2^8+2^9} = 2*4*11*23*2*4*16 = 259072 = 9$

Il reste à prendre le premier chiffre après la virgule de $\frac{9}{49} = 0.18...$ soit *1*.

Ensuite, on utilise la formule BBP du logarithme ci-dessus. La décroissance du terme en 10^{-n} autorise à ne faire que la somme des *1000* premiers termes de la série calculés comme ci-dessus à la place *1000*. En fait, on prend quelques chiffres de plus avant cette place pour gérer les retenues éventuelles, mais on a économisé une place mémoire considérable.

Depuis cette découverte, l'intérêt porté autour des formules BBP ne s'est pas vraiment démenti. On n'a jamais pu découvrir de formule pour π avec un terme en puissances de *10*. Cependant, Plouffe et Bellard ont montré par des atuces sur des séries factorielles que l'on pouvait calculer la *n*-ième décimale de π en temps n^2 ce qui n'est pas encore suffisant.
Ces formules montrent combien certaines constantes sont proches. Par exemple, en base 2^k, elles permettent d'accéder à π et pratiquement tous les logarithmes d'entiers pour les formules d'ordre *1* (termes en $\frac{1}{a.n+b}$). Plus généralement, on a donc accès aux logarithmes complexes (*ln* et *arctan* en parties réelles et imaginaires).

Pour les formules d'ordre *2* (avec $\frac{1}{(a.n+b)^2}$), on obtient les combinaisons bilinéaires de π ou de logarithmes d'entiers comme π**ln(2)* par exemple. On obtient alors toute la panoplie des dilogarithmes. Plus généralement, pour une formule d'ordre *p*, on obtient une combinaison de polylogarithmes d'ordre *p* correspondant (on essaie de garder en général les coefficients dans $\mathbb{Q}$). Un polylogarithme d'ordre *p* est défini par :

$$Li_p(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p} \quad pour \ |z| \le 1 \ \ et \ \ p \in [[1, +\infty[[$$

($|z|<1$ pour $p=1$)

Ces fonctions possèdent des propriétés très intéressantes et de nombreuses équations fonctionnelles comme la formule de multiplication :

$$\frac{Li_p(z^m)}{m^{p-1}} = \sum_{k=0}^{m-1} Li_p\left(z e^{2i\pi \frac{k}{m}} \right)$$

On a pu également associer dans ces combinaisons les constantes comme celle de Catalan avec une formule d'ordre *2* trouvée en mai 2000 :

$$G = \frac{1}{1024} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4096^n} \left(\begin{array}{l} \frac{-3072}{(24n+1)^2} + \frac{3072}{(24n+2)^2} + \frac{23040}{(24n+3)^2} - \frac{12288}{(24n+4)^2} + \frac{768}{(24n+5)^2} - \frac{9216}{(24n+6)^2} \\ - \frac{10368}{(24n+8)^2} - \frac{2496}{(24n+9)^2} + \frac{192}{(24n+10)^2} - \frac{768}{(24n+12)^2} + \frac{48}{(24n+13)^2} - \frac{360}{(24n+15)^2} \\ - \frac{648}{(24n+16)^2} - \frac{12}{(24n+17)^2} - \frac{168}{(24n+18)^2} - \frac{48}{(24n+20)^2} + \frac{39}{(24n+21)^2} \end{array} \right)$$

(Gourévitch-Huvent)

ou pour $\zeta(3)$ (Broadhurst-Gourévitch 2000) et $\zeta(5)$ (Huvent 2001).

L'étude fine des relations entre la fonction ζ pour les entiers ≤ 5, les polylogarithmes et les formules BBP a été réalisée par Huvent en 2001 à partir des équations de Kummer.
Huvent a systématiquement cherché et obtenu des formes linéaires dans $\mathbb{Z}$ de polylogarithmes (pris sous forme intégrale) et donnant des combinaisons de constantes comme π ou *ln(2)*.
Certaines valeurs de ces formes linéaires permettent d'isoler les constantes que l'on souhaite.
Il semble d'autre part que l'on puisse trouver des relations avec π uniquement pour les puissances de *2* et les puissances de *3*, cependant le débat reste d'actualité et la formule plus haut montre que c'est par exemple possible pour *Ln(9/10)* avec une puissance de *10*.

Ces constantes BBP nous définissent donc une classe de constantes très "proches" comme π^3 et $\zeta(3)$ à chaque ordre et confirment encore une fois la nature très différente de constantes comme π et *e*.

Intuitivement, la relative facilité avec laquelle on accède à une décimale sans connaître les précédente laisse supposer que l'on puisse trouver peut-être des propriétés sur les décimales de ces constantes. Des théorèmes reliant les fonctions polylogarithmes et l'irrationnalité existent mais sont difficilement exploitables dans ce cadre.
Par contre, en octobre 2000, Bailey et Crandall ont réduit les conditions de normalité à la vérification de l'hypothèse suivante :

Hypothèse A

Notons $r(n) = \dfrac{p(n)}{q(n)} \in \ (n)$, n>0 une fraction rationnelle polynômiale avec *deg(p)<deg(q)* et *r* sans pôles sur $\mathbb{N}$ (C'est la partie entre parenthèses des formules BBP après regroupement au même dénominateur). Soit $b \ge 2$ et $x_0=0$ (*b* représente la puissance dans la formule BBP, c'est à dire aussi la base). Alors la suite $\{x_0, x_1, x_2 \ldots\}$ définie par :

$$x_n = (b x_{n-1} + r_n) \ mod 1$$

a un attracteur fini ou est équidistribuée sur [*0,1*].
Ces deux derniers termes réclament des précisions :

Attracteur fini
Intuitivement, la propriété de posséder un attracteur fini représente le fait pour une séquence de s'approcher toujours des mêmes valeurs à partir d'un certain rang, ceci dans n'importe quel ordre (on peut montrer que dans le cas qui nous intéresse, c'est toujours le même ordre). C'est comme si l'on tendait vers une sorte de rationnel (dont les séquences de décimales sont périodiques) généralisé :
Précisément, une suite $x = (x_n) \in [0,1]$ possède un attracteur fini $W = \left(w_0, w_1, ..., w_{P-1}\right)$ si il existe $\varepsilon > 0$ et $K = K(\varepsilon)$ tel que pour tout $k \geq 0$,

$$\left| x_{K+k} - w_{t(k)} \right| < \varepsilon \quad \text{avec} \quad 0 \leq t(k) \leq P$$

On peut également montrer que dans le cas qui nous intéresse (formules BBP), cette propriété est équivalente à la rationnalité de la limite de x_n.

Equidistribution
Cette notion est assez intuitive, elle est vérifiée si la proportion d'apparition d'une séquence à valeurs dans [*0,1*] dans un intervalle donné [*c,d*] est justement la longueur de cet intervalle, soit *d-c*, bref si les valeurs prises sont distribuées uniformément dans l'intervalle [*0,1*] :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\#\left(x_j \in [c,d],\ j < n\right)}{n} = d - c$$

Cette notion est plus forte que la simple densité de la séquence (à cause du caractère uniforme de la répartition) et représente l'analogue continu de la propriété d'équirépartition des décimales d'un nombre.

Conséquence
L'équirépartition pour ce genre de séquence implique leur normalité. Comme l'on sait que certaines constantes comme π, *ln(2)* ou $\zeta(3)$ sont irrationnelles, sous l'hypothèse A, on en déduit la normalité de ces constantes. Reste à prouver l'hypothèse A…

On sait que la normalité d'un nombre entraine son irrationnalité. Cette condition est donc une sorte de conjecture menant à la réciproque dans le cas des formules BBP ou plus généralement des séquences définies plus haut. Les formules BBP n'ont en tous les cas pas encore livré tous leurs secrets…

Bibliographie

On trouvera l'essentiel de ces informations sur le nombre Pi et les théories présentées dans les livres suivants :

[1] J.P. DELAHAYE, *Le fascinant nombre Pi*
Bibliothèque Pour la Science - 1996
[2] J. & P. BORWEIN, *Pi and the AGM*
Wiley Inter-Science Vol4 - 1987
[3] D.BAILEY, P.BORWEIN, et S.PLOUFFE, *On The Rapid Computation of Various Polylogarithmic Constants*, 1996
http://www.cecm.sfu/personal/pborwein/
[4] L.LEWIN*, Structural Properties of Polylogarithms*
1991 AMS
[5] B.GOUREVITCH, *Une formule BBP pour* $\zeta(3)$ *:*
http://www.multimania.com/bgourevitch/perso/zeta.ps, 06/2000
[6] D.J.BROADHURST, *Polylogarithmic ladders, hypergeometric series and the ten millionth digits of* $\zeta(3)$ *and* $\zeta(5)$*;*
preprint, March 1998.
[7] P. EYMARD, JP. LAFON, *Autour du nombre* π
Hermann, 1999

[8] L. BERGGREN, J. BORWEIN, P. BORWEIN, Pi : A Source Book,
Springer, 1997
[9] D. BAILEY, R. CRANDALL, *On the Random Character of Fundamental Constant Expansions*
http://www.nersc.gov/~dhb/dhbpapers/bcrandom.ps, 10/2000
[10] G. HUVENT, *Formules BBP*
http://ano.univ-lille1.fr/seminaries/expo_huvent01.pdf, prepublication, 02/2001

Et dans les sites internet suivants :

[10] B. GOUREVITCH : *L'univers de Pi*
http://www.pi314.net
[11] D. BAILEY, J. & P. BORWEIN : *Ramanujan, Modular Equations, and Approximations to Pi or How to compute One Billion Digits of Pi*
http://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/borwein/index.html
[12] F. GARVAN, J. BORWEIN : *Approximations to Pi via the Dedekind eta function*
http://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/garvan/
[13] The Pi Pages
http://www.cecm.sfu.ca/pi/