Projet de licence de Mathématiques

Licence de mathématiques 2000 - 2001

Romain Dupont, Lynda Gastal

le 15 janvier 2001

Table des matières

Introduction

Face à l'ampleur du sujet, on a choisi de se focaliser sur l'analyse numérique des principaux algorithmes qui calculent π, des différentes méthodes disponibles pour accélerer ces algorithmes et enfin, d'expliquer le principe de l'extraction du n-ième digit de π sans avoir à calculer les précédentes.

Ainsi, trois types d'algorithmes qui calculent π ont été retenus :

- les algorithmes classiques (géométriques, numériques) représentés ici par la formule d'Euler
- les algorithmes s'appuyant sur le principe de la base variable (algorithmes compte-gouttes)
- les algorithmes à convergence quadratique.

Excepté pour les algorithmes comptes-gouttes, ces algorithmes ont fait l'appui d'une analyse numérique : rapidité de convergence, temps de calcul ...

En ce qui concerne les méthodes d'accélérations, deux ont été choisies :

- le Delta-2 d'Aitken qui peut être considéré comme un excellent algorithme d'accélération justifiant une étude approfondie.
- le principe de la multiplication rapide

Enfin, on présente le principe de l'extraction du n-ième digit de π : après avoir énoncé la formule de BBP, on détaille son intérêt dans le processus et les diverses “astuces” qui permettent d'effectuer des opérations (addition, puissance) de facon “locale”.

Un rappel historique permet de mieux situer dans l'histoire les différents algorithmes et méthodes décrites tout le long du rapport...

1 Historique

Le nombre π est connu depuis des milliers d'années et fascine toujours autant, bien que plus d'un milliard de ses décimales soit aujourd'hui connues. Mais ce résultat a pris du temps. On peut distinguer trois étapes importantes dans le dévoilement de ce nombre : l'approche géométrique, l'approche analytique et enfin l'approche informatique.

1.1 La géométrie

1.1.1 Les premières traces de Pi

Les premières traces de π datent d'environ 2000 av. J-C. On les trouvent chez les Babyloniens et les Egyptiens, qui ont du constater que le rapport du périmètre d'un cercle sur son diamètre était constant. Ces civilisations, dans lesquelles l'écriture décimale n'existait pas encore, ont tentées quelques approximation en base 60. Les Babyloniens ont estimé la différence entre l'aire d'un hexagone et celle d'un cercle de diamètre 1 :

$$3 + \frac{7}{60} + \frac{30}{3600} = 3 + \frac{1}{8} = 3,125$$

Les Egyptiens quant à eux, avaient compris que la formule de l'aire d'un cercle et celle du périmètre d'un cercle utilisaient une seule et meme constante. Le scribe Ahmès (1800-1650 av.J.-C.) assimile l'aire d'un cercle de diamètre d à un carré de côté a=8d/9, ce qui donne :

$$\pi R^2 = \frac{8^2}{9^2} d^2$$

Ces résultats sont certainement le fruit d'approximations rudimentaires à l'aide "d'outils" mathématiques tels que les cordes et les cailloux mais ils ont néanmoins fourni des valeurs correctes à moins d'1% près.

Parallèlement,vers -1200, les Chinois annonce que π vaut 3 ; tandis que la Bible, fournit vers -550 av.J.-C. elle aussi, 3 pour valeur de Pi. Heureusement, voilà les Grecs qui vont remettre un peu d'ordre...

1.1.2 Les Grecs

Les grecs eux se penchent sur la trisection de l'angle, la duplication du cube, et surtout la quadrature du cercle... Ils cherchent à construire un carré de même aire qu'un cercle à l'aide d'une règle et d'un compas et on prouvera bien plus tard que ce problème est équivalent à la transcendance de π. En effet, les seuls nombres que l'on peut construire avec une règle et un compas sont des combinaisons de racines et de fractions, c'est à dire les solutions d'équations polynomiales à coefficients rationnels...

Antiphon, contemporain de Socrate, propose la méthode suivante :

> On circonscrit un polygone à un cercle, et l'on double le nombre de côtés plusieurs fois... Comme l'on sait construire un carré de même aire qu'un polygone et que celui-ci tend à se confondre avec le cercle lorsque le nombre de ses côtés augmente, la quadrature du cercle semble résolue pour n'importe quelle précision.

Or, ce n'est pas parce qu'une propriété est vraie pour tout n entier qu'elle l'est à la limite. Ce processus va conditionner la méthode d'approximation de π pendant 2000 ans. On tentera d'approximer numériquement le périmètre d'un cercle en augmentant le nombre de polygones et en trouvant une relation entre le périmètre pour n polygones et pour n+1 polygones. Archimède s'en inspire avec succès et calcule 3 décimales avec à peu près ce genre de formules en notations modernes :

$$u_O = \frac{1}{2}$$
$$v_O = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - u_n^2}}$$
$$v_{n+1} = \frac{-1 + \sqrt{1 + v_n^2}}{v_n}$$
$$6 \times 2^n u_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \pi$$
$$6 \times 2^n v_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \pi$$

On ne notera aucune progression en Occident pendant 1500 ...

1.1.3 En Orient

En Inde, Aryabhata propose, vers 500 ap.J.C., 3 décimales exactes. En Chine (système décimal),Tsu Chung Chih semble être le premier à avoir proposé la fraction célèbre $355/113 =$ 3,14159292... vers 480 ap. J.-C. soit 6 décimales. Les Arabes et Perses (système Hexagésimal), Al Kashi calcule 10 digits soit 14 décimales en 1429... Record absolu ! Mais la notation décimale commence lentement à s'imposer en Europe au Moyen Âge.

1.1.4 La Renaissance... des mathématiques

C'est Fibonacci, l'un des seuls grands mathématiciens de l'époque et adepte de la notation décimale, qui s'illustre tout d'abord et obtient Pi=3,1418... Précisons que toutes les approximations précédemment citées sont obtenues par la méthode d'Archimède ou une de ses variantes. Notons aussi que l'on ne cernait pas encore précisément le côté transcendant de π (mais c'est un peu normal...) puisque Nicolas de Cues propose au XVe siècle

$$\pi = \frac{3}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{6}) \approx 3,136$$

. Regiomontanus démontrera (!) que cette valeur est erronée... Depuis les grecs, on savait qu'il existait des nombres plus compliqués que les rationnels (irrationnels) comme $21/2$. On sentait sans doute que π était d'une nature encore plus complexe, mais on tentait tout de même de l'exprimer en fonction de nombres simples. Pendant ce temps, la numérotation décimale fait vite progresser la course aux décimales qui devient un sport en vogue et les records ne quittent plus l'occident... Le plus célèbre des "coureurs" de décimales, et qui a donné son nom à Pi en Allemagne fut Ludolph von Ceulen (1539-1610). Ce dernier calcula 20 décimales à l'aide d'un polygone de 60*233 côtés puis 34 décimales, toujours par la méthode d'Archimède. On peut encore signaler la formule de Nicolas de Cues (1401 - 1464) :

$$a_1 = 0$$
$$b_1 = \frac{1}{4}$$
$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$
$$b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}$$

$$\frac{1}{2a_n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi$$
$$\frac{1}{2a_n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi$$

1.1.5 D'autres pistes de recherche

Mais déja, l'ère géométrique semble toucher à sa fin... Les mathématiciens commencent à découvrir d'autres méthodes que celle d'Archimède. Se basant néanmoins toujours sur des considérations géométriques à la base, ils prennent le problème par d'autres côtés... Ainsi, Viete (1540 - 1603) découvre (sans le démontrer) le premier produit infini donnant Pi en considérant cette fois-ci l'aire du cercle au lieu du périmètre...

$$\pi = 2\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\ ...$$

Mais la convergence est si lente qu'il préfère encore utiliser la méthode d'Archimède pour calculer lui-même 9 décimales en 1593. Descartes (1596 - 1650), de son côté part d'un cercle de périmètre fixé, construit son diamètre. C'est la méthode des isopérimètres... La convergence n'est guère plus rapide (toujours linéaire en tous les cas).

La quadrature du cercle continue, elle, à poser de véritables problèmes... Sortant de l'ère géométrique qui n'en a pas donné de solutions, l'analyse va s'y pencher, et on le verra, avec succès.

1.2 l'analyse : XVIIIe siècle - fin XIXe siècle

1.2.1 Les prémices de l'analyse...

Si il y a un mathématicien qui symbolise un peu ce passage de la géométrie à l'infinitésimal ou à la conscience de l'infini, c'est Wallis (1616-1703). Ses manipulations de suites infinies et ses recherches sur l'aire d'un quart de cercle (en partant de l'intégrale de (1-x2)n pour arriver à n=1/2) le poussent vers des horizons encore inconnus jusqu'alors. Il trouve ainsi après une démonstration restée célèbre en raison de ses méandres une très belle formule, le premier produit infini de rationnels convergeant vers Pi :

$$\pi = 2\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1}$$

La convergence est éxécrable, mais c'est peut-être la première véritable suite convergeant vers π sortie de l'analyse. Lui succède alors Lord Brounker (1620-1684), un ami de Wallis, qui, sur sa demande, continue les recherches vers les fractions continues et transforme le résultat de Wallis en un célèbre développement de $4/\pi$ qui donne :

$$\pi = 4\frac{1}{1+\frac{1^2}{2+\frac{3^2}{2+\frac{5^2}{2+...}}}}$$

Tout cela tourne beaucoup autour de l'infinitésimal mais ce n'est qu'avec le calcul différentiel que vont vraiment s'épanouir ces techniques.

1.2.2 L'envol de l'analyse

Newton applique cette théorie aux séries infinies (développements limités) et en déduit le développement d'arcsin et donc de belles formules sur π. A la même époque, Leibniz s'intéresse lui plutôt à celui d'arctan. Le développement d'arctan va jouer par la suite un rôle éminemment primordial dans le calcul des décimales de π, via la formule de Machin par exemple. On a en effet :

$$arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

pour x entre -1 et 1, ce qui est un résultat assez fort. (encore plus si l'on considère la complexité du développement limité de tan !) En Suisse Euler nous fournit d'innombrables formules. La plus belle est certainement :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

qui n'apporte guère au calcul des décimales mais dont la simplicité est tout à fait remarquable....

1.2.3 La diversification

Et un gros problème tracassait les mathématiciens depuis l'Antiquité : celui de l'irrationnalité. Euler avait montré celle de e et Lambert apporta une réponse au problème pour π en 1761. π était bien irrationnel ! Restait la transcendance. Malgré les efforts de beaucoup de mathématiciens, cette citadelle reste imprenable encore pour un siècle. Un des mathématiciens qui va apporter le plus indirectement à la recherche sur π est Joseph Fourier (1768-1830). Sa théorie sur la décomposition d'une fonction périodique en série est véritablement révolutionnaire. Ce résultat permet en effet de redémontrer simplement à peu près toutes les formules de Euler. Et bien sûr d'en trouver de nouvelles assez intéressantes.

1.2.4 π tombe dans l'ombre...

Le calcul des décimales de π semble ne plus interresser. Cependant, en 1882, Lindemann démontre la transcendance de π. La quadrature du cercle est donc impossible... C'est qu'au fin fond de l'Inde grandit en cette fin de XIXe siècle un personnage qui va tout bouleverser et révolutionner le siècle à venir... L'ère des algorithmes et de l'informatique va commencer avec lui...

1.3 Coté informatique

1.3.1 Un génie venu de l'Inde

Alors que les recherches sur π se sont un peu essoufflées en ce début du XXe siècle à cause de la théorie des ensembles de Cantor et des problèmes de Hilbert qui occupent les mathématiciens, un extraordinaire autodidacte indien du nom de Ramanujan commence à faire parler de lui. Il reprend les études des Thêta fonctions, en vogue à la fin du XIXe siècle, et en tire des propriétés qui permettent d'évaluer π plus rapidement qu'avant, mais toujours avec des convergences linéaires. Une des plus connues (1914) est sans doute :

$$\pi = \frac{9801}{\sqrt{8}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(4n)! - 1103 + 26390n)}{(n!)^4 (396)^{4n}} \right)^{-1}$$

Sa passion pour π puis sa collaboration avec Hardy permettent d'élaborer une des plus belles théories des mathématiques modernes, celle des équations modulaires. Malheureusement, la valeur de son travail ne sera pas reconnue immédiatement à cause de ses notations non standard qui rendent difficiles la lecture de ses carnets et sa (malheureuse) habitude de ne pas fournir de démonstrations... On peut penser de plus que la théorie n'était pas encore vraiment arrivée à maturité, Ramanujan était trop en avance. Après Ramanujan qui meurt prématurément en 1920, c'est le désert... jusqu'en 1976.

1.3.2 L'attentisme

Entre 1920 et 1976, pas de progrès théoriques concernant π. Bien sûr, l'apparition des ordinateurs permet enfin de dépasser en 1945 le vieux record de W. Shanks (707 décimales) Le record de 1946 par Ferguson s'effectua sur un calculateur de bureau à l'aide d'une des formules d'arctan. Et tous les records qui vont suivre utiliseront la même méthode pendant encore trente ans... et ils vont se succéder à un rythme assez soutenu puisque aux 536 décimales de Ferguson, et aux 2037 décimales calculées sur l'ENIAC, premier véritable ordinateur, en 1949, on arrive à 1 million de décimales en 1973 avec Guilloud. On suit là simplement les progrès des ordinateurs mais la méthode n'a pas changé, on utilise toujours la formule de Machin ou bien ses dérivées.

1.3.3 Les ordinateurs

En 1976, Eugène Salamin et Richard Brent publient, indépendamment l'un de l'autre, un article sur une nouvelle méthode de calcul des décimales de π. Il s'agit d'utiliser la moyenne arithmético-géométrique étudiée par Gauss. Ils en tirent un algorithme à convergence quadratique, c'est à dire que le nombre de décimales exactes double à chaque itération :

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ b_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n} \\ u_m = \frac{4a_m^2}{1 - 2\sum_{n=1}^{m} 2^n (a_n^2 - b_n^2)} &\overset{m \to +\infty}{\longrightarrow} \pi \end{aligned}$$

Le calcul des décimales de π se fait alors en un temps quasi-linéaire (n*log(n)), contrairement aux formules précédentes. Et pourtant, l'application n'est pas immédiate à cause de l'attente de la mise au point de méthodes de multiplications économiques, puisqu'il faut attendre 1981 pour que le deuxième million de décimales soit atteint par Miyoshi et Kanada. Mais à partir de ce moment, le rythme s'accélère franchement, puisque Guilloud, qui tente de garder son record en 1982 en calculant 14 décimales de plus que le couple japonais, se trouve hors du coup à la fin de l'année 1982, 16 millions de décimales ayant été atteints par Kanada, Tamura et Yoshino !

1.3.4 Une avalanche de formules !

Les années 80 voient l'éclosion de plusieurs formules très intéressantes concernant π. Les frères Borwein et Chudnovsky tirent des carnets de Ramanujan des algorithmes très performants, à convergence quadratique, quartique, nonique ! Le plus efficace en termes de rapport temps/rapidité semble être l'algorithme quartique :

$$\gamma_1 = \sqrt{2} - 1$$
$$\gamma_{n+1} = \frac{1 - \sqrt[4]{1 - y_n^4}}{1 + \sqrt[4]{1 - y_n^4}}$$
$$\alpha_0 = 6 - 4\sqrt{2}$$
$$\alpha_{n+1} = ((1 + \gamma_{n+1}^4 \alpha_n) - 2^{2n+3}(1 + \gamma_{n+1} + \gamma_{n+1}^2)\gamma_{n+1}$$
$$\beta_n = \frac{1}{\alpha_n} \overset{m \to +\infty}{\longrightarrow} \pi$$

Dès lors, avec une fine programmation des supercomputers (par exemple, utilisation de la transformée de Fourier rapide pour diminuer la complexité d'une multiplication), il n'y a pratiquement plus de limites aux calculs des décimales de π, seulement celle de la mémoire des ordinateurs et leur disponibilité ! Le premier milliard est atteint par les frères Chudnovsky en 1989 et l'on en est aujourd'hui à 206 milliards de décimales de π connues grâce à Kanada. Bien sûr, π ayant un nombre infini de décimales, ce n'est même pas une goutte d'eau, mais les mathématiciens espèrent toujours remarquer, comme les frères Chudnovsky, quelque irrégularité ou propriété dans les décimales de notre constante favorite...

1.3.5 Derniers progrès en date

Calculer les décimales, ce n'est pas tout, si l'on peut atteindre n'importe laquelle de ces décimales sans avoir besoin de calculer les précédentes, c'est un grand progrès également (théorique, bien sûr !). Et justement, c'est ce qu'a fait Plouffe lorsque le 19 septembre 1995 à 0h29, après des mois de recherche à tâtons, il trouve avec David Bailey et Peter Borwein la formule BBP :

$$\pi = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{16^i}(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6})$$

Cette formule permet de calculer en base hexadécimale ou binaire n'importe quel digit de Pi en un temps là-encore quasi-linéaire (n*log(n)). Les records ont rapidement fusé ! Du trio Bailey-Borwein-Plouffe qui atteint le milliardième digit en binaire, à Fabrice Bellard, un étudiant français qui réussit à atteindre le 1000 milliardième digit en septembre 1997 pour finir avec Colin Percival qui atteint le 40 000 milliardième digit en février 1999, où va-t-on s'arrêter ?

Cependant, il reste toujours à trouver un moyen rapide d'atteindre la n-ième décimale (base 10) et non pas le digit (en binaire). Pour l'instant, on en est à une rapidité en O(n^2) grâce à une méthode astucieuse de Simon Plouffe et une amélioration de Fabrice Bellard, mais cela est encore assez lent.

La prochaine étape est la démonstration de la normalité de π, qui n'est peut-être plus très loin, mais beaucoup de boulot reste à faire dans ce domaine.

On le voit, en cette fin de siècle, la recherche sur π semble connaître un renouveau et d'importantes avancées théoriques qui, on l'espère tous, ne vont pas s'arrêter de sitôt !

2 Approche de π

2.1 Formule d'Euler

2.1.1 La formule

La formule d'Euler est la suivante :

$$\pi = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 \times 2 \times .... \times n}{1 \times 3 \times .... \times (2n+1)}$$

Ce qu'on peut noter :

$$\pi = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

$$\begin{aligned} ou\ u_n &= \frac{1 \times 2 \times .... \times n}{1 \times 3 \times .... \times (2n+1)} \\ &= \frac{n!}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Les termes de cette série étant strictement positifs (et le premier terme u_0 valant 2) , cette suite converge vers π par valeurs inférieures. Cependant elle converge très lentement (plus lentement que la méthode d'Archimède). Nous developperons plus loin les différentes méthodes d'accélération de la convergence des suites.

2.1.2 Erreur commise

Le rapport de deux termes consécutifs est inférieur à $\frac{1}{2}$. En effet :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{(n+1)!}{(2n+3)!}}{\frac{n!}{(2n+1)!}} \\ &= \frac{(n+1)!}{(2n+3)!} \times \frac{2n+1)!}{n!} \\ &= \frac{n+1}{2n+3} \end{aligned}$$

$$\text{et } \begin{cases} \frac{n+1}{2n+3} \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1/2 \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1/3 < 1/2 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} u_1 &\leq \frac{1}{2} u_0 \\ &\vdots \\ u_i &\leq \frac{1}{2} u_{i-1} \\ &\vdots \\ u_{n+1} &\leq \frac{1}{2} u_n \end{aligned}$$

Il vient :

$$\sum_{n=0}^{n+1} u_n \quad \leq \quad \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{n} u_n$$

Donc :

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{2\sum_{n=0}^{n+1} u_n}{2\sum_{n=0}^{n} u_n} \\ &\leq \frac{1}{2} \qquad (1)\end{aligned}$$

Ainsi, l'erreur commise au rang n est inférieure au dernier terme utilisé. En effet, si le rapport de deux termes consécutifs était de $\frac{1}{2}$ l'erreur serait :

$$e_n \quad = \quad \sum_{i=n}^{+\infty} v_i \qquad (2)$$

C'est à dire la somme des termes négligés. Or, on a supposé que :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1/2$$

Soit :

$$v_i = \tfrac{1}{2^i} v_n \ \forall i > n$$

L'erreur peut donc s'exprimer en fonction de v_n :

$$\begin{aligned} e_n &= \sum_{i=n}^{+\infty} \frac{1}{2^i} v_n \\ e_n &= v_n \end{aligned}$$

On en déduit que l'erreur commise au rang n est inférieure au dernier terme utilisé.

Pour connaître π avec une précision de n décimales, il faut sommer $log_2(10^n) = 3.32$ termes, ce qui correspond au passage de la base 2 à la base 10.

2.1.3 Rapidité de convergence

La formule d'Euler a été saisie sous Maple afin d'en étudier sa rapidité de convergence.

eulerFormule := **proc**(n)
    local$i$;
        RETURN(2 ∗ sum(product(k, k = 1..i)/product(2 ∗ k + 1, k = 1..i), 'i' = 0..n))
    end

Les vraies 20 premières décimales de π sont comparées à celles calculées par la formule d'Euler :

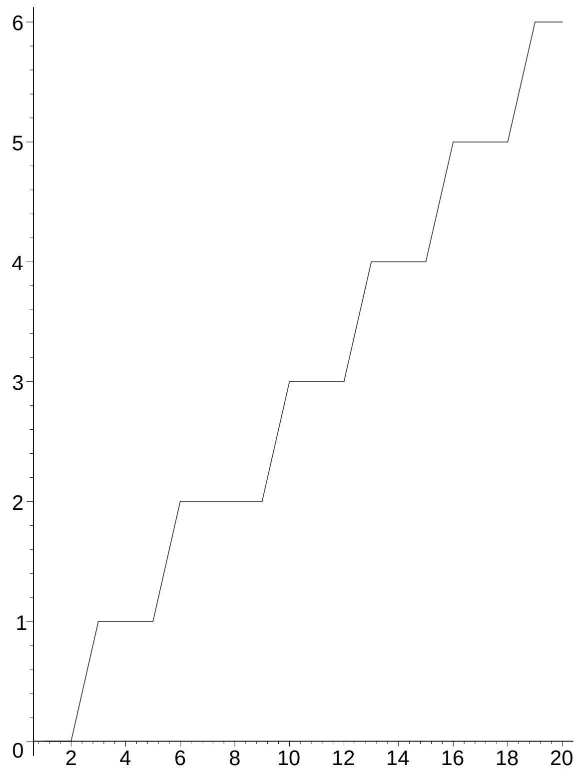

FIG. 1 – Rapidité de convergence de la formule de Euler

```
> evalf(Pi,20);
```

$$3.1415926535897932385$$

```
> evalf(eulerFormule(20),20);
```

$$3.1415922987403396327$$

On note que pour n=20, la formule d'Euler donne 6 décimales justes de π.

Le graphe ci-dessous (Figure 1) affiche le nombre de décimales justes calculées par la formule d'Euler. Pour cela, on crée une fonction $NbreZeros(valeur)$ sous Maple :

$$\mathit{nbreZeros} :=$$
$$\mathbf{proc}(\mathit{valeur})\,\mathbf{local}\mathit{tmp};\ \mathit{tmp} := \mathrm{trunc}(-\mathrm{log10}(\mathrm{abs}(\mathit{valeur})))\,;\ \mathrm{RETURN}(\mathit{tmp})\,\mathbf{end}$$

On affiche ainsi $NbreZeros(Pi - eulerFormule(i))$ avec i variant de 1 à 20.

On note une progression linéaire du nombre de décimales calculées.

2.2 Les Bases à pas variable

Cette algorithme revient à A.Sale, qui l'avait tout d'abord appliqué au calcul de e en 1968. Daniel Saada a proposé son adaptation au calcul de π en 1988.

2.2.1 Principe

On connaît le nombre π sous la forme 3.14159265358979323846264338327 9...C'est sa forme décimale. On voit bien ici que la base est 10 et que le pas de cette base est constant, c'est à dire que l'on a 10 à chaque niveau de décimale (digit si base autre que 10). On note cette base b = [1/10,1/10,1/10...] et π s'écrit $\pi_b = [3\,;\,1,\,4,\,5,\,...]$. En effet,

$$\pi = (3 + \frac{1}{10}(1 + \frac{1}{10}(4 + \frac{1}{10}(1 + \frac{1}{10}(5 + \frac{1}{10}...)))))$$

On appelle cette écriture forme de Horner.

Maintenant, considérons la série découverte par Euler précédemment détaillée et écrivons là sous la forme de Horner :C'est à dire

$$\pi = (2 + \frac{1}{3}(2 + \frac{2}{5}(2 + \frac{3}{7}(2 + \frac{4}{9}(2 + \frac{5}{11}...)))))$$

Ainsi, π s'écrit dans la base à pas variable b = $[\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, ...]$: $\pi_b = [2, 2, 2, 2, ...]$.Dans cette base, Pi est donc un des nombres les plus simples qui existent ! On connaît les digits de Pi dans cette base, donc pour obtenir une à une les décimales de Pi en base 10, il suffit de construire un algorithme qui opère un changement de base, c'est justement tout le principe de l'algorithme compte-gouttes.

2.2.2 Algorithme Compte-goutte

algorithme

Initialisation : On remplit la ligne A avec la suite des nombres entiers, la ligne B avec la suite des nombres impairs (on reconnait aux deux premières lignes les numérateurs et dénominateurs des pas de la base à pas variable), la ligne Initialisation avec des 2, La dernière colonne de la ligne retenue avec des zéros.

On remplit la ligne $\times 10$ en multipliant la ligne précédente par 10. On remplit les lignes retenue, somme et reste en parcourant le tableau de la droite vers la gauche : on somme les lignes $\times 10$ et retenue, on place le résultat dans la ligne somme, on évalue alors le quotient de cette somme par le nombre de la ligne B. Ce qui nous donne un reste que l'on place dans la ligne reste et un quotient, que l'on multiplie par le nombre de la ligne A., ce qui donne un nombre n que l'on place dans la ligne retenue. On continue de la meme façon en progressant vers la gauche.

Formellement, le principe général consiste à multiplier le digit par 10 et à en évaluer le reste après un équivalent de division euclidienne par le pas de la base à pas variable. Une retenue va apparaître à chaque calcul et provient du même phénomène qui fait que lorsque l'on multiplie 53 par 8, on multiplie d'abord 3 par 8, on retient 2 et on l'ajoute à la multiplication par 8 de 5 c'est à dire à la multiplication du digit suivant.

A	π	r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	=		3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
Initialisation		2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
$\times$ 10		20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
retenue		10	12	12	12	10	12	7	8	9	0	0	0	0
somme	3	30	32	32	32	30	32	27	28	29	20	20	20	20
reste		0	2	2	4	3	10	1	13	12	1	20	20	20
$\times$ 10		0	20	20	40	30	100	10	130	120	10	200	200	200
retenue		13	20	33	40	65	48	98	88	72	150	132	96	0
somme	1	13	40	53	80	95	148	108	218	192	160	332	296	200
reste		3	1	3	3	5	5	4	8	5	8	17	20	0
$\times$10		30	10	30	30	50	50	40	80	50	80	170	200	0
retenue		11	24	30	40	40	42	63	64	90	120	88	0	0
somme	4	41	34	60	70	90	92	103	144	140	200	258	200	0
reste		1	1	0	0	0	4	12	9	4	10	6	16	0
$\times$ 10		10	10	0	0	0	40	120	90	40	100	60	160	0
retenue		4	2	9	24	55	84	63	48	72	60	66	0	0
somme	1	14	12	9	24	55	124	183	138	112	160	126	160	0
reste		4	0	4	3	1	3	1	3	10	8	0	22	0

π se lit dans la première colonne.

remarques

Tout d'abord, un petit calcul en ce qui concerne l'encombrement mémoire. Dans la forme de Horner, on voit que le pas n/(2n+1) de la base est à chaque fois légèrement inférieur à 1/2. La valeur exacte 1/2 reviendrait d'ailleurs à considérer la base 2. Pour la conversion de base 2 en base 10, on aurait besoin de Log2(10n) = 3,32n digits environ. On peut considérer que c'est à peu près la même valeur pour notre base à pas variable vers la base 10. Donc si l'on veut obtenir n décimales, il faudra considérer au départ 3.32n cases. Pour 4 décimales (le 3 devant la virgule compris), on construit donc un tableau mémoire d'environ 14 cases de large. En fait, 13 suffiront ici.

D'autre part, un chiffre n'est exact que s'il n'est pas suivi d'un 9. En outre, on peut trouver 10, ce qui signifie que l'on doit augmenter d'une unité le chiffre précedent (propagation de la retenue).

2.2.3 D'autres algorithmes

En fait, toute série rationnelle doit pouvoir faire l'affaire à condition que dans sa forme de Horner, on ne trouve que des entiers comme expression de Pi dans la base à pas variables (pour la série précédente, on n'avait ainsi que des 2). En particulier, la série rationnelle de Ramanujan doit pouvoir être utilisée et donner un algorithme plus efficace.

2.3 Algorithme à convergence quadratique

2.3.1 Principe

Ces algorithmes ne peuvent s'écrire sous forme de séries : ils sont itératifs. Le nombre de décimales obtenues à chaque itération augmentent, mais cela ne signifie pas pour autant que l'on puisse déterminer de plus en plus rapidement les décimales de π, car à chaque itération, les calculs à effectuer sont de plus en plus lourd. Une implémentation de l'un des ces algorithmes sous Maple le démontre :

2.3.2 Un exemple

Soit l'algorihtme (découverte en 1973 par Eugène Salamin et Richard Brent) suivant (c'est un algorithme à convergence quadratique d'ordre 2) :

$a_0 = 1, b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, s_0 = 1/2$

$a_k = \frac{(a_{k-1} + b_{k-1})}{2}$

$b_k = \sqrt{(a_{k-1} * b_{k-1})}$

$c_k = a_k^2 - b_k^2$

$s_k = s_{k-1} - 2^k * c_k$

$p_k = 2\frac{a_k^2}{s_k}$

on initialise a_0, b_0 et c_0 et le nombre π est donné par les p_k.

Ce qui donne sous Maple :

$quadra := \mathbf{proc}(n)$

  $\mathbf{local} a, b, s, old\_a, c, p, i;$

    $a := 1;$

    $b := 1/\mathrm{sqrt}(2);$

    $s := 1/2;$

    $\mathbf{for}\ i\ \mathbf{to}\ n\ \mathbf{do}$

      $old\_a := a;\ a := 1/2 * old\_a + 1/2 * b;\ b := \mathrm{sqrt}(old\_a * b);\ c := a^2 - b^2;\ s := s - 2^i * c$

    $\mathbf{od};$

    $p := 2 * a^2/s;$

    $\mathrm{RETURN}(p)$

  $\mathbf{end}$

Si on compare les 50 premières décimales données par l'algorithme à la 5ème itération avec celles de π :

```
> evalf(Pi,50);
```

3.1415926535897932384626433832795028841971693993751

```
> evalf(quadra(5),50);
```

3.1415926535897932384626433832795028841971699491634

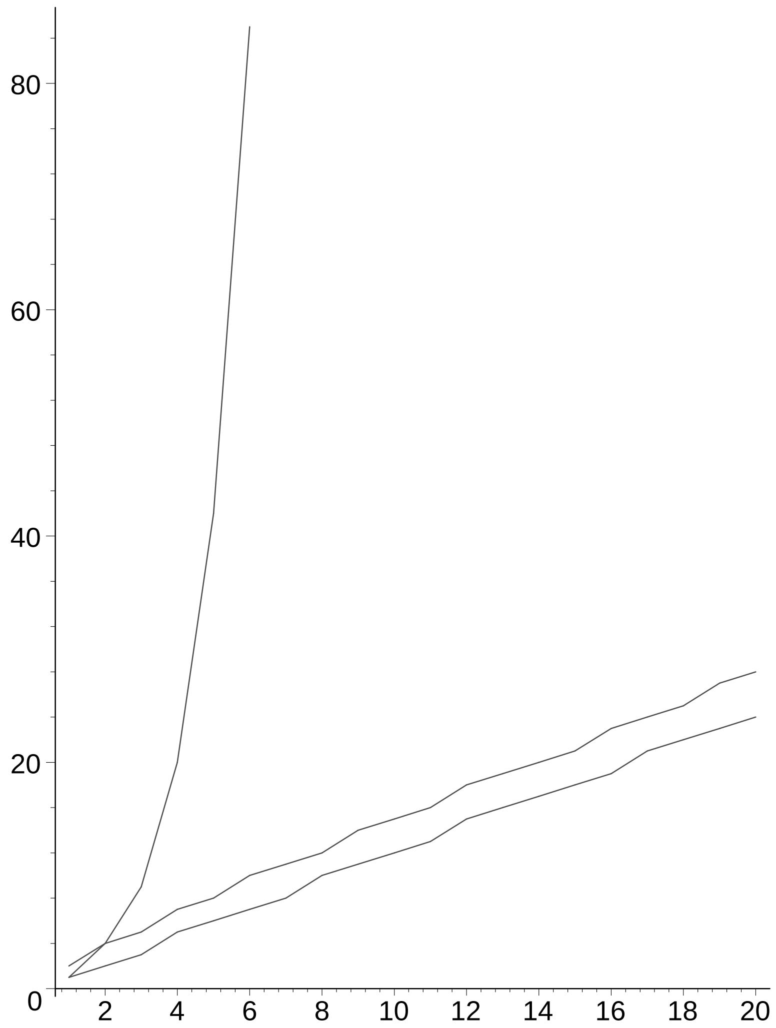

FIG. 2 – Rapidité de convergence de la formule à convergence quadratique

On note que les 18 premières décimales calculées en seulement 5 itérations par l'algorithme sont justes.

Le graphe ci-dessous (figure 2) affiche le nombre de décimales justes calculées par l'algorithme $quadra$ (avec $NbreZeros(Pi-quadra(i))$) en superposition avec 2 courbes (les 2 plus basses) qui sont le nombre de décimales calculées par la formule d'Euler et par le delta-2 d'Aitken appliquée à cette formule d'Euler :

La courbe possède une forme parabolique : le nombre de décimales calculées à chaque itération est doublé. La superposition avec la courbe obtenue avec Euler est sans appel : la convergence est nettement plus rapide. Mais il ne faut pas négliger deux points importants :

– Plus le nombre d'itérations demandées augmente, plus les calculs deviennent long : à partir de la 13ème itération, les calculs semblent durer une éternité ...

– Si on configure Maple pour qu'il calcule avec 10 décimales (valeur par défaut), à partir de la 6ème itération, l'algorithme perd en précision : ainsi la sixième itération de l'algorithme donne moins de décimales justes que la 4ème ... Le nombre de décimales à traiter devenant énorme dès la 4ème itération, Maple a atteint déjà les limites en terme de précisions

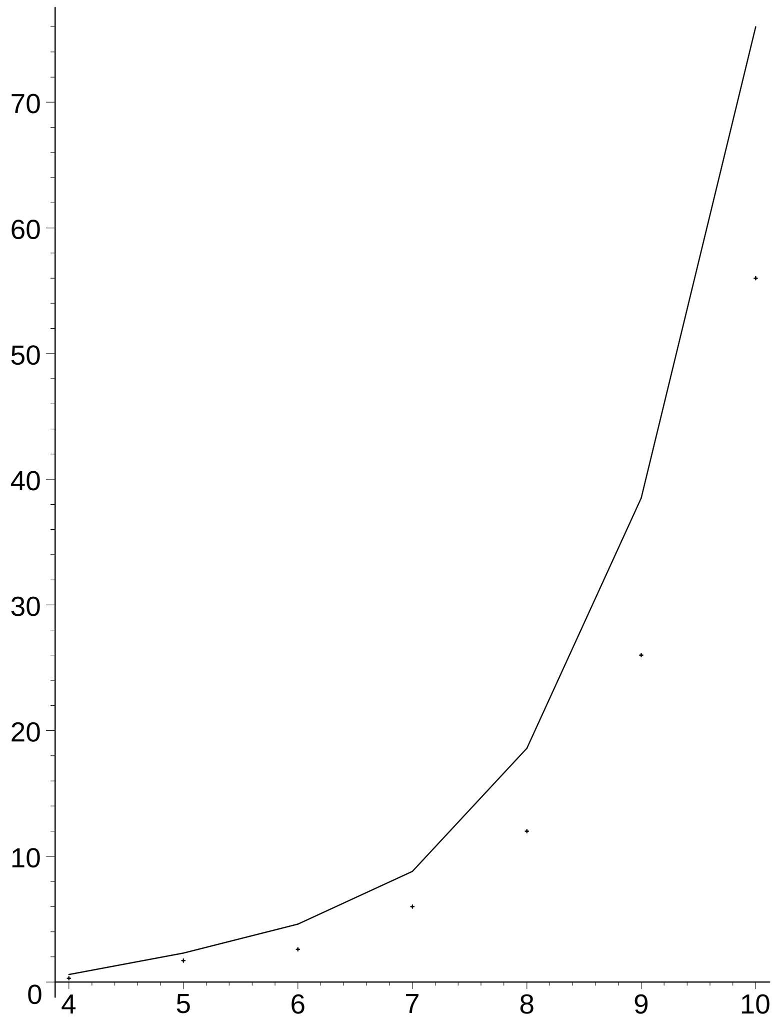

FIG. 3 – Temps et mémoire utilisés pour le calcul de π

(arrondis...). Si on on calcule avec 100 décimales, on retrouve le même problème dès la 7ème itération. Avec 1000 décimales, le calcul est juste jusqu'à la 10ème itération. On voit ainsi que très rapidement, le nombre de décimales à considérer doit être très important, et ce, dès le début du calcul de π, ce qui complexifie énormement les calculs et nécessite beaucoup de mémoire, comme le montre le graphe ci-dessous (figure 3) :

Le graphe ci-dessous (figure 3) affiche selon le nombre d'itérations (de i=4 à 10) de l'algorithme :
- en points : le temps (en secondes) mis pour faire le calcul (ce qui nous renseigne sur le nombre de calculs effectués et leur complexité)
- et, en lignes, la mémoire utilisée (en Méga-octets) pour faire ce calcul

Les courbes suivent une pente parabolique : nous voyons ainsi que les calculs et la mémoire utilisée augmentent de facon considérable quand le nombre d'itérations augmentent.

A cet égard, rajoutons que d'autres formules à convergence quadratique ont été trouvées mais on a constaté que celle d'ordre 4 (non détaillée ici, mais elle reprend le même principe que celle d'ordre 2) est la meilleure car elle a le meilleur rapport (Nombre de décimales trouvées) / (Nombre de calculs à effectuer) .

3 Accélération de la convergence

De nombreuses suites ont le défaut de converger très lentement. C'est pourquoi, les mathématiciens se sont penchés sur les méthodes permettant d'accélérer ces suites. Parmi les différentes méthodes, nous allons développer celle dit du Delta-2 d'Aitken, qui présente l'avantage d'etre simple et particulièrement efficace.

3.1 Delta-2 de Aitken

3.1.1 Biographie de Aitken

Alexander Aitken est né en 1895 en Nouvelle-Zélande. Etudiant les langues et les mathématiques à partir de 1913, il est blessé à la bataille de la Somme pendant la première guerre mondiale. Très marqué par cet événement, il rejoint Edimbourg en Ecosse après 3 mois d'hôpital. Doté d'une mémoire extraordinaire (il connaît tout de même 2000 décimales de Pi et est capable de donner la décimale à la n-ième place !), il met au point le fameux Delta2 accélérant de façon optimale les suites. Mais cette fameuse mémoire lui rappelle trop souvent la bataille de la Somme et le traumatise. Il écrit alors ses mémoires mais celles-ci ne contribuent qu'à aggraver sa relative folie mentale et il décède finalement en 1967.

C'est en 1926 qu'il invente son fameux procédé.

3.1.2 Présentation de la formule

Ce procédé consiste à définir une nouvelle suite t_n à partir de la suite x_n (convergeant vers L) que l'on veut accélérer, de terme général :

$$t_n = \frac{x_n x_{n-2} - x_{n-1}^2}{x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{x_{n-2} - 2x_{n-1} + x_n}$$

La limite de cette suite est la meme que celle de x_n.

Dès que la suite t_n dispose de 3 termes consécutifs, elle est en mesure d'en accélérer la convergence. Avant d'en étudier le degré d'accélération, vérifions si la suite converge bien vers L et qu'elle accélère bien la convergence de x_n .

3.1.3 Montrons que la suite t_n converge aussi vers L

Soit x_n une suite convergeant vers L avec une erreur $e_n = x_n$ - L et vérifiant

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = A \neq 0 \tag{3}$$

On ne considère ainsi que les suites dont la rapidité de convergence ne s'accroit pas (ie. le nombre de décimales justes de π ne s'accroit pas à chaque itération). En effet, les suites dont le rapport des erreurs de deux termes consécutifs tend vers 0 ne peuvent être accélérées et le *Delta2* d'Aitken n'aurait ici aucun effet.

Supposons que (2) est exact pour tout n, c'est à dire que

$$e_{n+1} = Ae_n \tag{4}$$

Or, on a

$$e_{n+2} = Ae_{n+1}$$

$$\textit{soit :}$$
$$e_{n+2} - e_{n+1} = A(e_{n+1} - e_n)$$
$$\textit{avec}$$
$$x_{n+1} - x_n = e_{n+1} - e_n$$
$$x_{n+2} - x_{n+1} = e_{n+2} - e_{n+1}$$

d'où :

$$x_{n+2} - x_{n+1} = A(x_{n+1} - x_n) \tag{5}$$

Posons maintenant

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n \tag{6}$$

D'après (2), on a :

$$x_{n+1} - L = A(x_n - L)$$

En factorisant par L :

$$L(1 - A) = x_{n+1} - Ax_n$$
$$L = \frac{x_{n+1} - Ax_n}{1 - A} \tag{7}$$

Calculons $\Delta^2 x_n$:

$$\Delta^2 x_n = \Delta(\Delta x_n) = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n$$

Or, on a daprès (4) :

$$\begin{aligned} 1 - A &= 1 - \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n} \\ &= \frac{\Delta x_n^2}{\Delta x_n} \end{aligned}$$

Soit :

$$1 - A = \frac{2x_{n+1} - x_n - x_{n+2}}{x_{n+1} - x_n}$$

Et on avait :

$$\begin{aligned} L &= \frac{x_{n+1} - Ax_n}{1 - A} \\ &= x_n + \frac{x_{n+1} - x_n}{1 - A} \\ &= x_n + \frac{\Delta x_n}{1 - A} \end{aligned}$$

Il vient :

$$L = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}$$

L'hypothèse (1) n'étant vraie qu'au passage à la limite, on construit la suite t_n :

$$t_n = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{x_{n-2} - 2x_{n-1} + x_n} \tag{8}$$

avec t_n qui tend vers L en l'infini.

3.1.4 Montrons que la suite t_n accélère bien la convergence de x_n

Notons L la limite de la suite x_n. On dit qu'il y a accélération de la convergence si on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{t_n - L}{x_n - L} = 0$$

Vérifions que la suite t_n converge réellement plus rapidemant que x_n.

Posons $e_{n+1} = (A + b_n)e_n$ où b_n tend vers 0. On a :

$$\begin{aligned}
\Delta e_n &= e_{n+1} - e_n \\
&= x_{n+1} - L - x_n + L \\
&= \Delta x_n \\
\Delta^2 e_n &= e_{n+2} - 2e_{n+1} + e_n \\
&= x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n \\
&= \Delta^2 x_n
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
e_{n+2} &= (A + b_{n+1})e_{n+1} \\
&= (A + b_{n+1})(A + b_n)e_n
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\Delta^2 e_n &= e_{n+2} - 2e_{n+1} + e_n \\
&= (A + b_{n+1})(A + b_n)e_n - 2(A + b_n)e_n + e_n \\
&= (A - 1)^2 e_n + b'_n e_n
\end{aligned}$$

où $b'_n = Ab_n + Ab_{n+1} + b_{n+1}b_n - 2b_n$ (et on a $b'_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$) .

On remplace maintenant dans (5), ce qui donne :

$$\begin{aligned}
t_n &= x_n - \frac{(A - 1 + b_n)^2 e_n^2}{((A - 1)^2 + b'_n)e_n} \\
\Leftrightarrow t_n - L &= x_n - L - \frac{(A - 1 + b_n)^2 e_n}{(A - 1)^2 + b'_n}
\end{aligned}$$

Et en divisant par $x_n - L = e_n \neq$ O :

$$\frac{t_n - L}{x_n - L} = 1 - \frac{(A - 1 + b_n)^2}{(A - 1)^2 + b'_n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Le rapport $\dfrac{t_n - L}{x_n - L}$ tend bien vers 0.

3.1.5 Utilisation de la formule pour accélerer les formules d'approche de π

On notera d'abord que le premier terme de la formule est très instable numériquement, le numérateur et le dénominateur étant proches de 0. On préféra alors le deuxième terme : $t_n = x_n - \dfrac{(x_n - x_{n-1})^2}{x_{n-2} - 2x_{n-1} + x_n}$.

En effet, lorsqu'on manipule des nombres qui possèdent beaucoup de décimales, si l'addition (ou la soustraction) n'engendre quasiment pas d'erreurs de calculs (parce que le résultat possède quasiment le même nombre de décimales que les opérandes), la multiplication risque fort rapidement de donner des résultats qui sont trop grands pour être stockés et gérés par la machine, cette dernière arrondissant alors les trop grands nombres (on perd ainsi en précision et les performances de l'algorithmes seraient amoidries). Si la machine est quand même capable de stocker de très grands nombres, leur traitement devient alors très lourd du fait du nombre augmenté de décimales à gérer.

Dans les deux cas de figures, il convient alors d'effectuer les multiplications au dernier moment après toutes les additions (ou soustractions). Le deuxième terme est en ce point intéressant dans la mesure où il n'effectue qu'une seule multiplication contre deux pour le premier terme.

On implémente le delta 2 d'Aitken sous Maple afin d'en étudier l'accélération.

$delta :=$ **proc**(x, n)
  localtmp;
    $tmp := x(n) - (x(n) - x(n-1))^2/(x(n-2) - 2?x(n-1) + x(n))$; RETURN(tmp)
  end

On teste alors la formule du delta2 d'Aitken avec la formule d'Euler et on compare avec les vraies décimales de π :

On évalue les 20 (vraies) premières décimales de π :

```
> evalf(Pi,20);
```

$$3.1415926535897932385$$

On évalue les 20 premières décimales calculées par la formule d'Euler sans accélération :

```
> evalf(eulerFormule(20),20);
```

$$3.1415922987403396327$$

On évalue les 20 premières décimales calculées par le Delta 2 :

```
> evalf(delta(eulerFormule,20),20);
```

$$3.1415926521357612577$$

On note ainsi une accélération de la convergence de la formule d'Euler : on gagne 2 décimales à chaque itération.

Le graphe ci-dessous (figure 4) affiche le nombre de décimales justes calculées par l'algorithme. L'échelle est la meme que celle qui a été choisie pour le graphe pour la formule d'Euler afin d'en

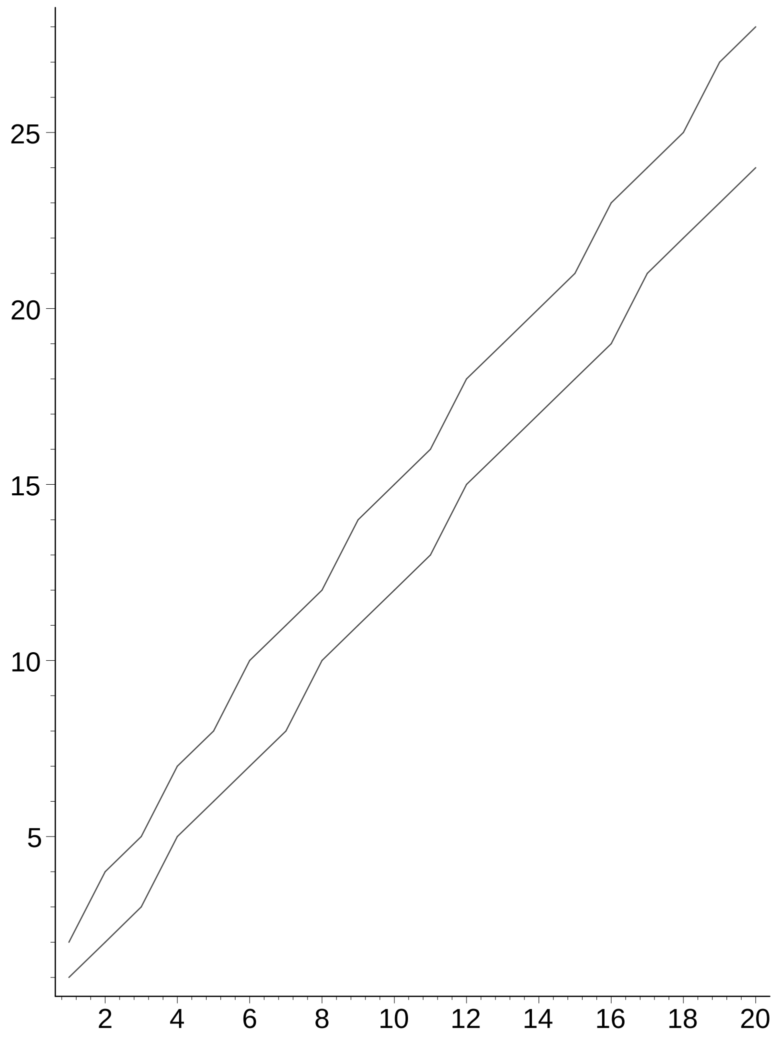

FIG. 4 – Rapidité de convergence de la formule d'Euler accélérée par le Delta 2

faciliter la comparaison (la courbe la plus basse est celle obtenue avec la formule d'Euler sans accélération).

3.1.6 Deux remarques pour l'accélération des suites

- Pour les suites à convergence logarithmique : il n'existe en fait pas de méthode d'accélération générale pour ce type de suite.
- Pour les suites dont l'erreur de convergence tend vers 0 : ce sont les suites dont le nombre de décimales π calculées augmente à chaque itération. Ces suites ne peuvent etre accélérées par le delta-2 : elles le sont déjà ...

3.2 Multiplication rapide

3.3 Principe

La plupart des algorithmes utilsent des multiplications. Or, celles-ci peuvent s'avérer très couteuses (en place mémoire et en temps) étant donné que la longueur des calculs augmentent avec la taille des nombres. Ainsi, quand on double la taille des nombres, on multiplie par quatre le temps de calcul. La multiplication habituelle demande un temps de travail de l'ordre de n^2.

Le premier a avoir découvert une méthode permettant de réduire le temps de travail est A. Karatsuba en 1962. Il remarqua qu'un nombre de taille 2k pouvait s'écrire sous la forme a+b10^k où a et b sont deux nombres de taille k. Ainsi, le produit de deux nombres de taille 2k se ramène au calcul de :

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b}10^k)(\mathrm{c}+\mathrm{d}10^k) = \mathrm{ac} - [(\mathrm{a}-\mathrm{b})(\mathrm{c}-\mathrm{d}) - \mathrm{ac} - \mathrm{bd}]10^k + \mathrm{bd}10^2 k$$

Par exemple, si on multiplie deux entiers de 100 chiffres, cette relation ramène le calcul a trois multiplications d'entiers de taille 50. On peut alors réutiliser cette relation sur chacune des multiplications, ce qui ramène le calcul à neuf multiplications entre entiers de taille 25 etc...En utilisant ce procédé récursivement,on obtient une multiplication de complexité $n^{log_2 3} = n^{1,58}$ au lieu du n^2. Cependant, l'organisation des calculs est plus complexe.

3.4 Un exemple

Supposons que l'on veuille multiplier 23 par 58. Avec la multiplication classique (c'est à dire telle qu'on l'a apprise à l'école), on ferait les calculs suivant :

$$8 \times 3 + 8 \times 20 + 50 \times 3 + 50 \times 20$$

En utilisant la multiplication rapide, on fait les calculs suivant :

$$\begin{aligned}
(3 + 2 \times 10)(8 + 5 \times 10) \\
&= 3 \times 8 - ((3 - 2)(8 - 5) - 3 \times 8 - 2 \times 5)10 + 2 \times 5 \times 100 \times 1 \\
&= 24 + 310 + 1000 \\
&= 133
\end{aligned}$$

4 Comment obtenir le milliardième digit de π ?

Jusqu'à présent, pour obtenir la valeur de la n-ième décimale de PI, il fallait nécessairement calculer les n premières décimales. Toute l'histoire du calcul du milliardième digit de π commence par la découverte de cette nouvelle formule de π, communément appelée "formule de BBP" (Bailey, Borwein, Plouffe) ...

4.1 Nouvelle formule de π

4.1.1 Enoncé de la formule

Au soir du 19 Septembre 1995, à l'aide de ses puissants ordinateurs et de logiciels de calcul formel, le grand mathématicien Simon Plouffe, établit que :

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}\right) \tag{9}$$

4.1.2 Démonstration rapide

La somme peut s'écrire sous la forme $\sum_{i=0}^{\infty} m * \frac{1}{16^i * (8i+k)}$ avec m,k entiers. Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i * (8i+k)} &= \sqrt{2^k} * \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{x^{k+8i}}{8i+k}\right]_0^{1/\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2^k} \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{1/\sqrt{2}} x^{k-1+8i} dx \end{aligned} \tag{10}$$

Or on a le développement en série entière

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$$

La série x^{k-1+8i} convergeant uniformément sur $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$, on peut intervertir la somme et l'intégrale d'où :

$$\begin{aligned} (10) &= \sqrt{2^k} \int_0^{1/\sqrt{2}} \sum_{i=0}^{\infty} x^{k-1+8i} dx \\ (10) &= \sqrt{2^k} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^{k-1}}{1-x^8} dx* \end{aligned}$$

On a donc :

$$(9) = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5}{1-x^8} dx$$

En faisant un changement de variable $y = \sqrt{2}x$:

$$(9) = \int_0^1 \frac{16(y-1)}{y^4 - 2y^3 + 4y - 4} dy$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 4\frac{2-y}{y^2-2y+2}dy + \int_0^1 4\frac{y}{y^2-2}dy \\
&= \int_0^1 \frac{4-4y}{y^2-2y+2}dy + \int_0^1 \frac{4}{1+(y-1)^2}dy + \int_0^1 4\frac{y}{y^2-2}dy
\end{aligned}
$$

On intègre ...

$$
\begin{aligned}
(9) &= \Big[-2ln(y^2-2y+2) + 4 * arctan(y-1) + 2ln(y^2-2)\Big]_0^1 \\
&= -4 * arctan(-1) \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

4.1.3 Quel est son intérêt pour le calcul de π

Toutes les autres formules découvertes jusqu'ici ne permettent pas d'obtenir le milliardième chiffre de π car elles sont basées sur des multiplications entre des grands nombres et il n'existe pas actuellement de méthode pour multiplier *localement* deux grands nombres.

Ici, la formule de Plouffe n'effectue pas de multiplications entre deux grands nombres, seulement des additions et une multiplication par $\frac{1}{16^i}$ qu'on sait effectuer *localement*.

En effet, posons $u_n = \frac{1}{16^i*(8i+k)}$. Pour connaître le n-ième digit de π, il suffit de calculer la somme $\sum_{i=0}^{\infty} u_n$ *localement* (ie. au n-ième digit) par le principe d'une addition *locale* jusqu'au n-ième terme nécessaire plus quelques termes supplémentaires afin de prévenir les retenues qui peuvent apparaitre (ce qu'on sait déjà faire).

Reste alors à calculer le n-ième digit des u_n et pour ce faire, on utilisera des astuces algébriques.

4.2 Détail du principe de l'addition "locale" des u_n

On veut additionner $u_0, u_1, u_2, ..., u_n$ dont on suppose qu'on connaisse leur valeur "locale" ie leur n-ième digit (et quelques digits autour du n-ième afin de prévenir les problèmes de retenues).

Prenons par exemple deux grands nombres dont on ne connaît que quelques décimales :

$$
\begin{array}{r}
....5678....... \\
+\underline{...9877.......} \\
...abcde.......
\end{array}
$$

Pour connaître a, il suffit d'additionner 5 et 9 en prenant en compte les éventuels retenues qui peuvent apparaître. On a ainsi besoin de connaître les quelques décimales qui précédent 5 et 9 (ici les chiffres 6 et 8 suffisent). Tout le principe de l'addition *locale* entre 2 grands nombres est basé sur ce principe. Il en est de même pour la multiplication par un petit nombre (nécessairement petit sinon la multiplication *locale* serait trop gourmande en calculs et on rejoindrait le même problème qu'avec la multiplication entre 2 grands nombres).

On additionne alors les $u_0, u_1, u_2, ..., u_n$ selon ce principe. Mais il reste un autre problème de retenue : il se peut que le terme u_{n+1} ou u_{n+2} ... soient suffisamment grands pour transmettre une retenue à la somme $\sum_{i=0}^{n} u_n$. Pour prévenir ce problème, il suffit de calculer aussi les termes

u_{n+1} ou u_{n+2} ... jusqu'à ce que ces termes soient suffisament petits pour ne pas transmettre de retenues à la somme $\sum_{i=0}^{n} u_n$. Cette dernière condition est en fait vite vérifiée car $\frac{1}{16^i}$ devient très petit quand i augmente et ainsi le terme u_{n+1} (et les termes u_{n+k} en général) devient vite beaucoup plus petit devant u_n.

4.3 Calcul du n-ième chiffre de $\frac{m}{k*(16^i)}$

Seul le calcul du nombre $\frac{1}{k*(16^i)}$ sera explicité et il suffira par la suite de multiplier *localement* par m, m petit, pour obtenir le terme voulu $\frac{m}{k*(16^i)}$ (ce qu'on sait faire, cf sous-section précédente). Précisons que m et k sont considérés comme étant des nombres "petits", c'est-à-dire dont le nombre de décimales est petit (ie. négligeable devant i). Cette condition est vérifiée car les termes de la forme $k = (8i + p)$ ont un nombre de décimales petits (si i=10^9, le nombre de décimales de $k = (8i + p)$ est 9 ou 10).

On applique ici des astuces algébriques pour calculer rapidement les restes d'une division euclidienne. En effet, le n-ième chiffre hexadécimale de $\frac{1}{k*(16^i)}$ est le (n-i) ième chiffre de $\frac{1}{k}$ qui est le premier chiffre après la virgule de $\frac{16^{n-i}}{k}$.

Si le r est le reste de la division euclidienne $\frac{16^{n-i}}{k}$ ($16^{n-i} = k * q + r$ avec q le quotient), le premier chiffre après la virgule de $\frac{r}{k}$ est celui qu'on cherche.

Pour déterminer ce reste r, il suffit de déterminer 16^{n-i} en "arithmétique modulo k". Pour cela, on décompose 16^{n-i} avec des nombres de la forme 16^w , w étant de la forme 2^p (une puissance de 2). Ces nombres étant faciles à déterminer (et on les calcule une fois pour toutes), le calcul du reste devient très rapide.

Un exemple rapide pour illustrer ce principe :

On veut calculer le 1000ième chiffre de $\frac{1}{7*16^3}$. Ce chiffre est en fait le 997ième chiffre de $\frac{1}{7}$, soit le 1er chiffre après la virgule de $\frac{16^{996}}{7}$, soit en fait le 1er chiffre après la virgule de $\frac{r}{7}$.

Déterminons r, le reste de $\frac{16^{996}}{7}$.

On a : $16^{996} = 16^{512} * 16^{256} * 16^{128} * 16^{64} * 16^{32} * 16^4$ et

$16^1 \equiv 2 \pmod 7$

$16^2 \equiv 4 \pmod 7$

$16^4 \equiv 2 \pmod 7$

$16^8 \equiv 4 \pmod 7$

...

On a donc $16^{996} = 4 * 2 * 4 * 2 * 4 * 2 \equiv 1 \pmod 7$

d'où $r = 1$

et comme $\frac{1}{7} = 0,14...$, le millième chiffre de $\frac{1}{7*16^3}$ est 1.

4.4 Pourquoi seulement en base 2 ?

La formule de Plouffe est seulement intéressante en base 16 (et donc en base 2^n) à cause du terme en $\frac{1}{16^i}$ qui ne peut être déterminé localement qu'en base 16.

En effet, on ne peut passer de la base 2 (ou 2^n) à la base 10 directement comme ce serait le cas avec une base 2^n. Le passage d'une base 2 à une base 2^n peut se faire en regroupant par petits bouts les chiffres.

Par exemple, pour passer de la base 2 à la base 16, on regroupe les chiffres 4 par 4 :

17 (base 10) $= \underbrace{0001}_{1}\underbrace{0001}_{1}$ (base 2) $=$ 1 1 (base 16)

Pour passer de la base 2 (ou 2^n) à la base 10, on a besoin de connaître tous les chiffres qui précèdent celui qu'on veut déterminer (on ne peut pas regrouper ici les chiffres), c'est-à-dire qu'on a besoin de connaître tous les digits de π, ce qui est impossible...

5 Bibliographie

On s'est appuyé sur deux ouvrages :

– Le livre : " Le fascinant nombre π " de Jean-Paul DELAHAYE

– Le site internet www.multimania.com/bgourevitch.

On remercie au passage l'aimable soutien de Boris GOUREVITCH, concepteur et rédacteur du site Internet cité ci-dessus.