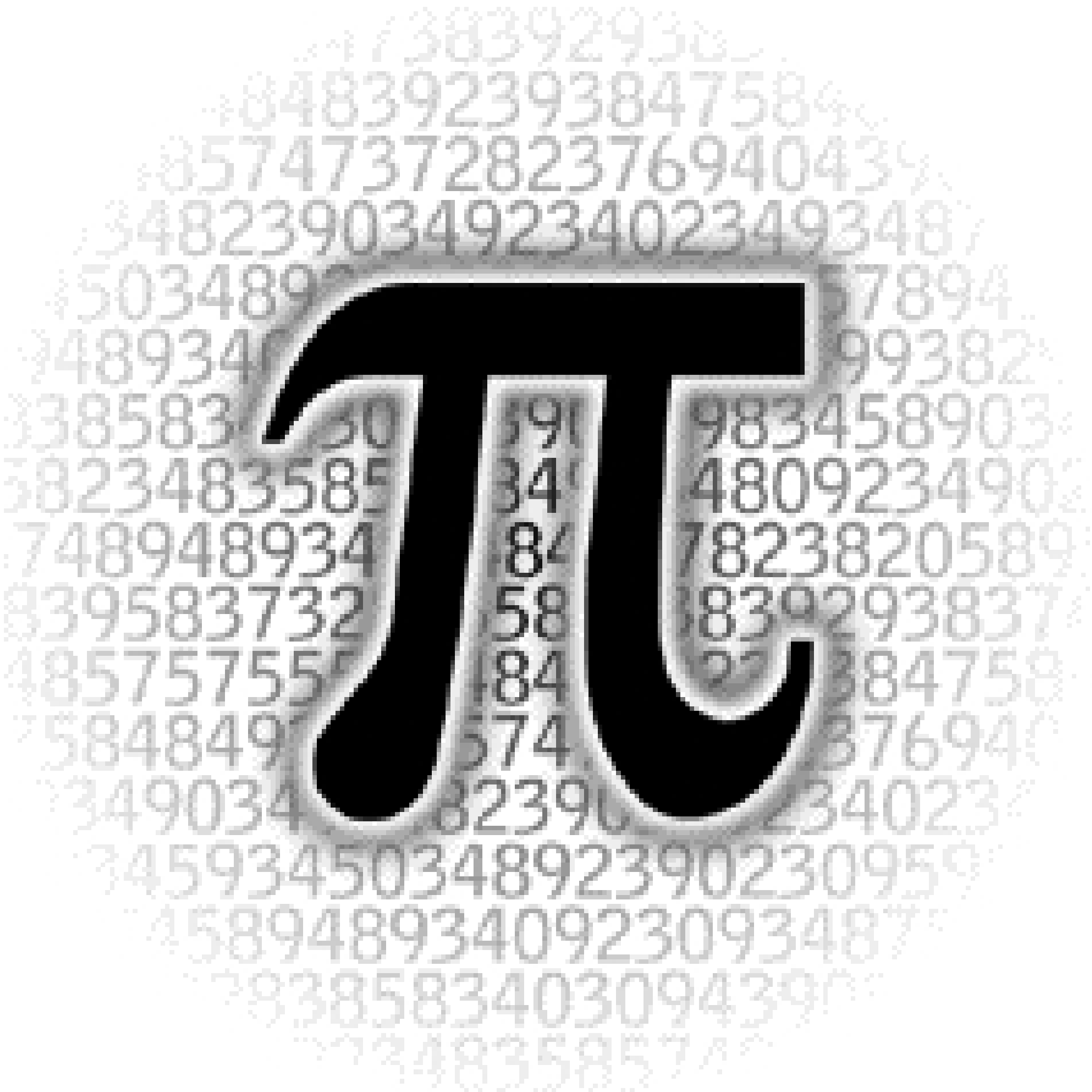
MP (08-09)

TIPE Partie D

DURON Jérome



[APPROXIMATION DE PI]

Quelles informations sont nécessaires à la connaissance des décimales de Pi ?

Approximation de Pi

Quelles informations sont nécessaires à la connaissance des décimales de Pi

1. Pourquoi Chercher Pi

Cette quête des décimales de Pi, outre le fait de les chercher par curiosités, permet de créer des algorithmes puissants, ayant souvent une autre application. Par exemple, la formule BBP que l'on développera ci-dessous, a permis d'avoir des algorithmes rapides pour déterminer certaines constante, telles que ln(2), ln(3), ln(5), Arctan(2), etc. Pi intervenant, dans le calcul des ζ(2n+1), il est intéressant de le connaître explicitement. Par exemple :

$$\zeta(3) = \frac{7\pi^3}{180} - 2\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3(e^{2\pi n} - 1)}\right)$$

Pi fascine des mathématiciens depuis qu'il existe. Il est vrai que lors d'une analyse un peu approfondie, il paraît très étrange, parfois même inquiétant. Alors qui sait ? Peut-être que dans quelques milliers de décimales, nous trouverons une révélation dans ce nombre…

2. Approximation par les probabilités.

Pi intervient beaucoup en physique, en particulier dans la probabilité d'événement. Voici l'étude de quatre exemples.

2.1. Méthode des Aiguilles de Buffon :

Principe : Soit un plancher dont la largeur des lattes est de a. On lance une aiguille de longueur b sur le plancher. La probabilité que l'aiguille coupe alors une intersection entre deux lattes est de $\frac{(2*b)}{(\pi*a)}$ (cf. démo en annexes).

Pour faciliter le calcul, on a pris a=b=1.

Lancer une anguille revient à choisir un point, puis un angle pour l'orientation.

La fonction rand() renvoyant un entier naturel, il est nécessaire de lui faire afficher un nombre entre 0 et a, puis de diviser ce nombre par a pour avoir un réel entre 0 et 1. Plus a est grand, plus on sera proche d'une fonction qui renvoie un nombre réel entre 0 et 1. Après quelques essais, l'expérience montre qu'il faut prendre a > 10^3.

Procédure :

```
> buffon:=proc(n,a)
>  local i,b,x,X,t;                      -déclaration des variables
>  b:=0;
>  for i from 0 to n do                  -début de la récurrence
>    x:=rand(-a..a)()*10/a;              -abscisse aléatoire x ∈ [0,10]
>    t:=rand(-a..a)()*2*Pi/a;            -angle aléatoire t ∈ [0,2π]
>    X:=evalf(x+cos(t));                 -calcul du 2ème sommet
>    if abs(floor(x)-floor(X))=1         -si les sommets sont de part et d'autres
                                         d'une intersection
                         or x=floor(x)   -ou si un des sommets est sur …
                         or X=floor(X)   …une intersection
>       then b:=b+1;                     -alors incrémentation du compteur
>    end if;                             -fin du test
>  end do;                               -fin de la récurrence
>  RETURN(evalf(2*n/b));                 -calcul de Pi
> end;
```

2.2. Méthode de Monte-Carlos :

Principe : Soit un carré dont le coin inférieur gauche est le centre d'un cercle (donc d'un quart de cercle à l'intérieur de ce carré). On choisit un point au hasard dans ce carré. La probabilité pour que le point se trouve dans le quart de cercle est le rapport des aires, soit $\frac{\pi}{4}$.

Pour le calcul, on a pris le côté du carré égal à 1.

Même remarque que précédemment pour la fonction rand().

Procédure :

```
> carlos:=proc(n,a)
>    local i,c,x,y,z;                    -déclaration des variables
>    c:=0;
>    for i from 1 to n do                -début de la récurrence
>      x:=rand(0..a)()/a;                -abscisse aléatoire x∈ [0,1]
>      y:=rand(0..a)()/a;                -ordonnée aléatoire y∈ [0,1]
>      z:=evalf(x^2+y^2);                -calcul du module
>      if z<=1                           -test si le point est dans le cercle
>         then c:=c+1;                   -incrémentation du compteur
>      end if;                           -fin du test
>    end do;                             -fin de la récurrence
> RETURN(evalf(4*c/n));                  -calcul de Pi
> end;
```

2.3. Méthode de Césaro :

Principe : La probabilité que deux nombres réels soient premiers entres eux est de $\frac{6}{\pi^2}$ (cf. démo en annexes).

Ici, il faut que rand() renvoie un entier naturel, donc que a tende vers l'infini.

Procédure :

```
> cesaro:=proc(n,a)
>    local i,x,y,c;                      -déclaration des variables
>    c:=0;
>    for i from 1 to n do                -début de la récurrence
>      x:=rand(2..a)();                  -entier aléatoire x∈ [2,10^8]
>      y:=rand(2..a)();                  -entier aléatoire x∈ [2,10^8]
>      if igcd(x,y)=1 then               -test si x et y sont premiers entre eux
>         c:=c+1;                        -incrémentation du compteur
>      end if;                           -fin du test
>    end do;                             -fin de la récurrence
> RETURN(evalf(sqrt(6*n/c)));            -calcul de Pi
> end;
```

2.4. Méthode de « Pile et Face » :

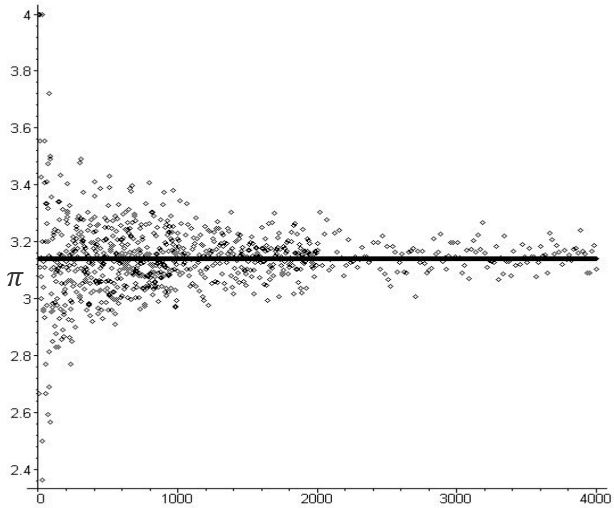
Principe : On considère ici un lancer de pièce. La probabilité qu'il y ait le même nombre de fois pile que face sur 2n lancers est de $\frac{1}{\sqrt{\pi * n}}$.

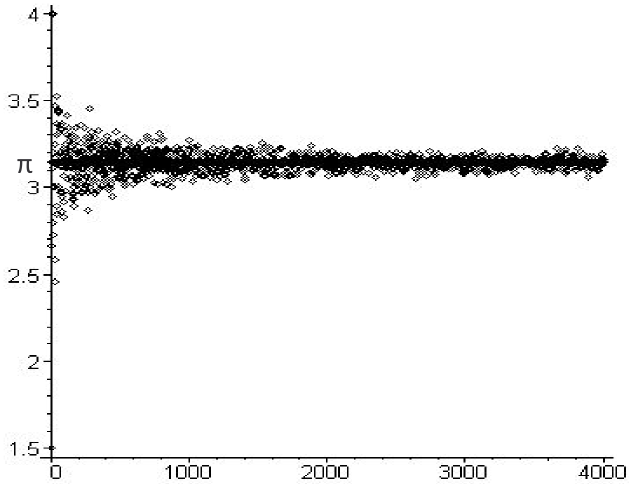
Procédure :

```
> pileface:=proc(n,a)
>    local i,j,x,c,C;                    -déclarations des variables
>    C:=0;
```

```
 >    for i from 1 to a do                              -début de la récurrence
 >      c:=0;
 >      for j from 1 to 2*n do                          -début de la récurrence pour 2n lancers
 >          x:=rand(1..2)();                            -on choisit pile ou face aléatoirement
 >          if x=1 then                                 -test si x =1
 >             c:=c+1;                                  -incrémentation du compteur
 >          end if;                                     -fin du test
 >      end do;                                         -fin de la récurrence des 2n lancers
 >      if c=n then                                     -test si nb de piles égale nb de faces
 >         C:=C+1;                                      -incrémentation du compteur
 >      end if;                                         -fin du test
 >    end do;                                           -fin de la récurrence
 > RETURN(evalf((a/C)^2/n));                            -calcul de Pi
 > end;
```

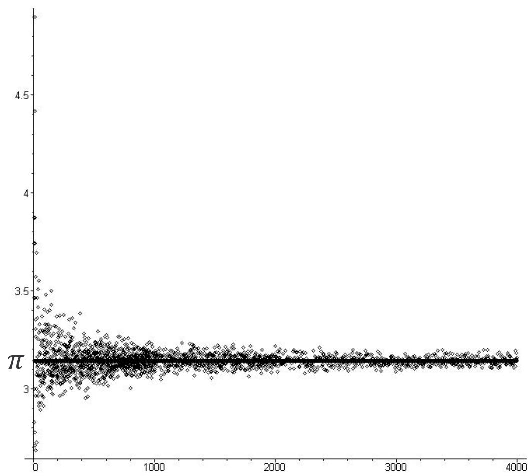
Voici quelques résultats de convergence :





Méthode de Buffon (a=10^8)

Méthode de Monte-Carlos (a=10^8)



Méthode de Césaro (a=10^8)

Conclusion :

Voici donc ce que l'on peut tirer de ces quatre applications : Ces méthodes pour connaître Pi ne peuvent suffire qu'à celui qui se contenterait de peu de décimales, dans le sens où le temps de calcul des algorithmes paraît relativement long, même avec la méthode la plus rapide qui est celle de Monte-Carlo.

Ces méthodes permettent donc d'obtenir une approximation empirique de Pi, qui pourront alors contenter le physicien, mais pas le mathématicien.

3. Approximation par les séries et les intégrales

De nombreuses séries ou intégrales font intervenir Pi. Les plus connues sont bien entendu l'intégrale de $\sqrt{1-x^2}$ puisque ce n'est ni plus ni moins qu'un demi cercle sur [-1 ; 1] ou encore les séries ζ(n) de Riemann qui font intervenir les puissances paires de Pi. Voici donc quelques résultats :

$6\sqrt{\sum_{k=0}^{10\,000}\frac{1}{k^2}}$ = 3.1414971637 avec 10 décimales. On a alors Pi à 10^{-4}près, mais seules les 3 premières sont justes.

$2\prod_{k=0}^{10\,000}\frac{4k^2}{4k^2-1}$ = 3.1415141186 avec 10 décimales. On a aussi Pi à 10^{-4} près, mais seules les 4 premières sont justes

$\int_0^1\frac{\ln(x)}{1+x}dx$ Par une méthode de subdivision, on peut obtenir Pi (non traité dans ce dossier)

Par ces méthodes on arrive à obtenir Pi avec plus de précision et plus rapidement qu'avec la méthode précédente, mais connaître un nombre à 10^{-15}près ne permet pas d'être sûr d'avoir les 14 premières décimales exactes (et même aucune).

Cette méthode est même dangereuse. Si l'on calcule Pi par Arctan(1) (=Pi/4) par un développement en série entière, on se rend compte que l'on obtient Pi avec beaucoup de décimales justes rapidement, mais que seulement quelques décimales isolées sont fausses. Attention donc aux conclusions trop hâtives !

Et si l'on en revenait à la définition ? Le rapport du périmètre par le diamètre :

Pi = 2a sin(Pi/2a). Voici la formule d'approximation de Pi par un polygone de diamètre 1 qui possède a cotés. Evidemment, la présence de Pi peut paraître exagérée, puisque c'est lui que l'on calcule. Mais Maple ne sait calculer sinus qu'avec des radians…Cette méthode est toutefois très efficace, puisqu'avec a=10 000, on a Pi à 10^{-7} près. Encore faut-il avoir un ordinateur qui calcule les sinus avec autre chose que des radians pour ne pas tourner en rond !

4. Formule BBP (Bailey-Borwein-Plouffe)

Voici enfin le terme de ce dossier. Les différentes méthodes précédentes étaient agréables car relativement simples à mettre en place pour avoir Pi, mais on a vu qu'elles n'étaient que très peu performantes.

Voici alors une formule qui a révolutionné le monde des constantes (du moins certaines). En effet, elle permet d'avoir les décimales d'un nombre sans nécessairement connaître les précédentes.

4.1. Historique

Simon Plouffe (mondialement connu pour avoir retenu les quelques 4400 premières décimales de Pi), a un jour (le 19 septembre 1995 à 0h29) découvert cette formule qui pourrait paraître bien anodine : La formule BBP :

$$\pi = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}\right)$$

Se rendant compte que cette formule ressemble étrangement à une formule de conversion en base 16, ces trois mathématiciens réussirent à démontrer que l'on pouvait attendre n'importe quel digit de Pi en base 2^p. Nous ne traiterons ici que le cas p=4, c'est-à-dire en hexadécimale (base 16).

4.2. Principe

Le but est de calculer le $N^{\text{ième}}$ digit de Pi en base 16 (on ne parle plus de décimales, mais de digits), sans calculer les précédents.

Pour cela, on cherche alors le premier digit du nombre $16^{N-1}\pi$. Cela se fait très facilement grâce à la formule BBP ci-dessus, que l'on va étudier.

4.3. Nombre de termes à calculer :

Pour des raisons de notation plus simple, calculons le $N+1^{\text{eme}}$ digit

Notons :

$$S_{N+1}(a) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{16^{N-i}}{8i+a}$$

$$T_{N+1}(a) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{16^{N-i}}{8i+a}$$

$$R_{N+1}(a) = \sum_{i=N}^{+\infty} \frac{16^{N-i}}{8i+a}$$

On a : $S_{N+1}(a)=T_{N+1}(a)+R_{N+1}(a)$. Etudions-les séparément

$T_{N+1}(a)$

$$T_{N+1}(a) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{16^{N-i}}{8i+a}$$

Ne cherchant que les premiers digits, il est inutile de calculer 16^{N-i} qui serait très, voire beaucoup trop long. Il suffit donc de raisonner modulo 8i+a que l'ordinateur fait très rapidement grâce à l'exponentiation rapide. On a alors à calculer :

$$T'_{N+1}(a) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{16^{N-i}\,[8i+a]}{8i+a}$$

$R_{N+1}(a)$

$$R_{N+1}(a) = \sum_{i=N}^{+\infty} \frac{16^{N-i}}{8i+a}$$

A chaque terme, on divise par plus de 16 le terme général. Chaque terme aura donc un digit nul de plus. Il faut donc calculer d termes de $R_{N+1}(a)$, si d est le nombre de digits calculés.

Ainsi, il suffit de calculer :

$$\sum_{i=0}^{N+d} 16^{N-i}\left(\frac{4}{8i+1}-\frac{2}{8i+4}-\frac{1}{8i+5}-\frac{1}{8i+6}\right)$$

en utilisant l'exponentiation rapide pour les N premiers termes.

Quelle est alors l'erreur commise ? Cherchons le d optimal.

4.4. Calcul de d

Notons désormais :

$$S'_{N+1}(a) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{16^{N-i}\,[8i+a]}{8i+a} + \sum_{i=N}^{N+d} \frac{1}{16^{i-N}(8i+a)}$$

On calcule alors $4S'_{N+1}(1)-2S'_{N+1}(2)-4S'_{N+1}(5)-S'_{N+1}(6)$

Ayant notre nombre, l'erreur commise sur le dernier digit est de 1 pour chaque S'_{N+1} soit une erreur maximal de ±4 donc avec d=3, par exemple, le premier digit risque d'être erroné si le dernier digit est compris entre 0 et 3 et les précédents égaux à 0 ou si le dernier digit est compris entre C et F et les précédents égaux à F.

En se servant des probabilités si l'on considère les digits plus ou moins aléatoires, il y a une chance sur seize d'avoir un F en deuxième position, ce qui parait assez faible pour pouvoir affirmer que 3 digits suffisent. Le cas échéant, il faudra alors recommencer.

4.5. Les procédures

<table>
<tr>
<td><u>Exponentiation rapide</u>

>expo:=proc(N,a)
>local i,x ;
>if N>0
    Then x :=expo(iquo(N,2),a) ;
    If N mod 2=0
        Then RETURN(x^2 mod a);
        Else RETURN(16*x^2 mod a);</td>
<td><u>Calcul de 16^N modulo a (N>0)</u>

Explication sur un exemple :

$16^{18}= (16^9)^2$
    $=[16*(16^4)^2]^2$
    $=[16*((16^2)^2)^2]^2$

Avant chaque calcul de carré, on repasse en</td>
</tr>
</table>

```
        End if;
        Else RETURN(1);
>End if;
>End;
```

modulo a

<u>Digits de a/n</u>

```
>Digit :=proc(a,n,d)
>local D,i,b ;
>b :=a ; D :=[] ;
>for i from 0 do d-1 do
        b:=irem(b,n)*16;
        D:=[op(D),iquo(b,n)];
>end do;
>RETURN(D);
>End;
```

<u>Calcul des digits de a/n (a<n)</u>

De même qu'à la main : on calcule les digits un par un en multipliant à chaque fois le reste par 16.

Le résultat est stocké sous forme de liste (D)

<u>Somme hexadécimale</u>

```
>Somme_hexa:=proc(A,B);
>Local i,r,C,E ;
>If nops(B)<>nops(A) then RETURN("erreur") fi;
>R:=0;E:=[];
>C:=A+B;
>For i from nops(C) to 1 by -1 do
        If r+C[i]>15
                Then E:=[C[i]+r-16,op(E)];
                        R:=1;
        Elif r+C[i]<0
                Then E:=[C[i]+r+16,op(E)];
                        R:=-1;
        Else E:=[C[i]+r,op(E)]
                        R:=0;
        End if;
>End do;
>RETURN(E);
>End;
```

<u>Somme de deux listes (nombres hexa)</u>

De même qu'à la main, on calcule terme par terme :

Calcul « brut »

Test s'il y a des retenues (notées r)
Puis fait le nécessaire pour que les chiffres soient entre 0 et 15.

<u>Multiplication hexa par un scalaire</u>

```
>Mult:=proc(a,D)
>Local I,r,E,F;
>r:=0; F:=[];
>E:=a*D;
>For i from nops(D) to 1 by -1 do
        If r+E[i]>15
                Then F:=[irem(E[i]+r,16),op(F)];
                        r:=iquo(E[i]+r,16);
                Else F:=[(E[i]+r,op(F)];
                        r:=0;
        End if;
>End do;
>RETURN(F);
>End
```

<u>Calcul de multiplication</u>

Pareil que précédemment :

Calcul "brut"

Test s'il y a des retenues
Puis fait le nécessaire pour que les chiffres soient entre 0 et 15.

Calcul de S’n(a)
 	
>digits_Pi:=proc(N,z,d)
>Local i,S,A ;
>I :=0;A:=[];
>S :=seq(0,i=1..d)] ;
>For i from 0 to N-1 do
    A:=Digit(expo(N-1-i,z(i))),z(i),d);
    S:=somme_hexa(S,A);
>End do;
>For i from N to N+d do
    A:=Digit(1,16^(1+i-N)*z(i),d);
    S:=somme_hexa(S,A);
>End do;
>RETURN(S);
>End;
	Calcul d’un terme élémentaire
	
	Calcul de $T_{N-1}(a)$
	
	Calcul de $R_{N-1}(a)$

Somme des $S'_n(a)$ >Digits_pi_f:=proc(N,d) >Local A,B,C,D,E; >A:=digits_pi(N,i->8*i+1),d); >B:=digits_pi(N,i->8*i+4),d); >C:=digits_pi(N,i->8*i+5),d); >D:=digits_pi(N,i->8*i+6),d); >E:=somme_hexa(somme_hexa(somme_hexa(Mult(4,A),-Mult(2,B)),-C),-D) ; >RETURN(E) ; >End ;	**Calcul final** On calcule chaque $S_{N-1}(a)$ On multiplie par son coefficient et on somme

4.6. Quelques résultats

10 000 000eme : 6	([6,12,2]) en 3h 56min 30s 132ms
1 000 000eme : A	([10,5,8]) en 21min 23s 124ms
1 000eme : 3	([3,4,A]) en 547 ms

4.7. Sur le même modèle

Cette méthode très performante a permis d’appliquer ce résultat à d’autres constantes telles que :

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$$

$$\ln\left(\frac{10}{9}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n10^n}$$

Et pour ln(10/9), on pourra le faire en base 10.

5. Pour aller plus loin : sur le même modèle que Pi

Prenons un exemple. Par exemple pour arctan(2) :

Considérons la série d'intégrales suivante : (cf. annexes)

$$I_1^{(k)}=\int_0^1 \frac{2xln^k(x)}{x^2-2}dx=\int_0^1 \frac{2x(x^6+2x^4+4x^2 8)ln^k(x)}{x^8-2^4}dx$$

$$I_2^{(k)}=\int_0^1 \frac{2xln^k(x)}{x^2+2}dx$$

$$I_3^{(k)}=\int_0^1 \frac{(2x+2)ln^k(x)}{x^2+2x+2}dx$$

$$I_4^{(k)}=\int_0^1 \frac{(2x-2)ln^k(x)}{x^2-2x+2}dx=\int_0^1 \frac{(2x-2)(x^6+2x^5+2x^4-4x^2-8x-8)ln^k(x)}{x^8-2^4}dx$$

$$I_5^{(k)}=\int_0^1 \frac{2ln^k(x)}{x^2-2x+2}dx=\int_0^1 \frac{2(x^6+2x^5+2x^4-4x^2-8x-8)ln^k(x)}{x^8-2^4}dx$$

$$I_6^{(k)}=\int_0^1 \frac{2ln^k(x)}{x^2+2x+2}dx=\int_0^1 \frac{2(x^6-2x^5+2x^4-4x^2+8x-8)ln^k(x)}{x^8-2^4}dx$$

$$I_7^{(k)}=\int_0^1 \frac{(4x^3-4x)ln^k(x)}{x^4-2x^2+4}dx$$

$$I_8^{(k)}=\int_0^1 \frac{(4x^3-6x^2+4x-4)ln^k(x)}{x^4-2x^3+2x^2-4x+4}dx$$

$$I_9^{(k)}=\int_0^1 \frac{2(x^2-4x+2)ln^k(x)}{x^4-2x^3+2x^2-4x+4}dx$$

$$I_{10}^{(k)}=\int_0^1 \frac{(8x^7-14x^6+12x^5-16x^3+16x-16)ln^k(x)}{x^8-2x^7+2x^6-4x^4+8x^2-16x+16}dx$$

$$I_{11}^{(k)}=\int_0^1 \frac{2(x^6+4x^5+8x^4-8x^3+16x^2-16x+8)ln^k(x)}{x^8-2x^7+2x^6-4x^4+8x^2-16x+16}dx$$

Notons $L_k(a_1, a_2, \ldots, a_{11})=\sum_{n=1}^{11} a_n l_n^{(k)}$.

On trouve par exemple :

$L_0(a_1, a_2, \ldots, a_{11})=\left(\frac{1}{2}a_5-\frac{1}{2}a_6+a_{11}\right)\pi+(a_2+a_7)\ln(3)-(a_1+a_2+a_3+a_4+2a_7+2a_8+4a_{10})\ln(2)+(a_3+a_{10})\ln(5)+(2a_6-a_{11})\arctan(2)$

Attention toutefois au calcul d'intégrale. En effet, certaines identités peuvent apparaître sans que nous les voyons, du fait qu'elles ne soient pas très connues, ou tout simplement que l'ordinateur ne les connaît pas. Par exemple : -2arctan(3/2)+4arctan(2)=π, ou encore (plus connue, mais pas par l'ordinateur) : arctan(1/x)+arctan(x)=π/2.

Il suffit alors d'annuler les coefficients nécessaires. On pose :

$$\left(\frac{1}{2}a_5 - \frac{1}{2}a_6 + a_{11}\right) = (a_2 + a_7) = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 2a_7 + 2a_8 + 4a_{10}) = (a_3 + a_{10}) = 0$$

On a alors : $\begin{cases} a_1 = -a_4 - a_7 - 2a_8 - 3a_{10} \\ a_2 = -a_7 \\ a_3 = -a_{10} \\ a_6 = a_5 + 2a_{11} \end{cases}$

Avec ces relations, on peut donc en déduire :

$(2a_5 + 3a_{11})\arctan(2) = (-a_4 - a_7 - 2a_8 - 3a_{10})I_1^0 - a_7 I_2^0 - a_{10}I_3^0 + a_4 I_4^0 + a_5 I_5^0 + (a_5 + 2a_{11})I_6^0 + a_7 I_7^0 + a_8 I_8^0 + a_9 I_9^0 + a_{10}I_{10}^0 + a_{11}I_{11}^0$

Pour éviter d'avoir trop de termes, on pose : $a_7 = a_8 = a_9 = a_{10} = a_{11} = 0$

On a alors : $2a_5 \arctan(2) = -a_4 I_1^0 + a_4 I_4^0 + a_5 I_5^0 + a_5\, I_6^0$

En mettant alors cette somme sous forme d'une seule intégrale, on trouve :

$$2a_5 \arctan(2) = \int_0^1 \frac{2(x^2+2)[(a_4+2a_5)x^4 - 2a_4x^3 - 4a_4x^2 - 4a_4x + 4a_4 - 8a_5]}{x^4+4}dx$$

En posant a_4=0 et a_5=0.5 pour simplifier, grâce à la relation

$$\int_0^1 \frac{ax^{k-1}}{a-x^b}dx = \int_0^1 \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^{bi+k-1}}{a^i}dx = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{a^i}\frac{1}{bi+k}$$

on obtient

$$Arctan(2) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{-1}{16^{i+1}}\left[\frac{2}{8i+7} + \frac{4}{8i+5} - \frac{8}{8i+3} - \frac{16}{8i+1}\right]$$

Et voici alors une formule type BBP pour Arctan(2). On pourra calculer ces digits en base 16, de la même manière que celle de Pi, selon la méthode décrite ci-dessus.

6. Démonstrations

6.1. *Formule de ζ(3)*

Pour Pi, on a la formule :

$$\pi^3 = \frac{180}{7}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3 \tanh(n\pi)}$$

Or :

$$\frac{1}{n^3\tanh(n\pi)} = \frac{1}{n^3}\times\frac{e^{n\pi}+e^{-n\pi}}{e^{n\pi}-e^{-n\pi}} = \frac{1}{n^3}\times\frac{1+e^{-2n\pi}}{1-e^{-2n\pi}} = \frac{1}{n^3}\times\frac{(e^{2n}-1)+2}{e^{2n}-1} = \frac{1}{n^3}+\frac{2}{e^{2n}-1}$$

D'où

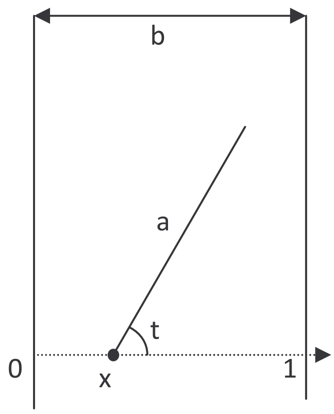
$$\pi^3 = \frac{180}{7}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3\tanh(n\pi)} = \frac{180}{7}\zeta(3) + \frac{180}{7}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^3(e^{2n\pi}-1)}$$

Finalement :

$$\boxed{\zeta(3) = \frac{7\pi^3}{180} - 2\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3(e^{2\pi n}-1)}\right)}$$

CQFD

6.2. Aiguilles de Buffon :



Travaillons avec $t \in [\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, puis on multipliera ensuite la probabilité par 2. Pour que l'aiguille coupe donc la rainure d'équation x=1, il faut que a.cos(a)>(1-x). Ainsi, la probabilité qu'elle la coupe est l'aire des cas favorables A_1 sur tous les cas possibles A_2.

$$A_1 = \int_0^{\pi} a\cos(t)\,dt = a\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - a\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 2a$$

$$A_2 = 2\pi b$$

Ainsi, on a bien la probabilité qui vaut $\frac{2a}{\pi b}$

CQFD

6.3. Cesaro :

Montrons : La probabilité pour que deux nombres entiers compris a et b tels que a<b<n! soient premiers entre eux est de $\frac{6}{\pi^2}$ lorsque n tend vers l'infini.

Pour tout nombre premier p inférieur à n, notons A_p l'événement :

A_p : « p n'est pas un diviseur commun de a et b »

La proportion d'entiers compris entre 1 et n! qui sont divisibles par p est 1/p donc la probabilité que a soit divisible par p est 1/p. De même pour b. Par l'indépendance, la probabilité que a et b soient divisibles par p est donc 1/p². On en déduit la probabilité de l'événement A_p :

$$p(A_p) = \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

Notons maintenant $A_n = \bigcap_{p\leq n!} A_p$ l'événement : « a et b n'ont aucun diviseur commun inférieur à n! », autrement dit « a et b sont premiers entres eux ».

Comme les événements A_p sont indépendants, il vient :

$$p_n = p(A_n) = \prod_{p\leq n!}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

Enfin, par passage à la limite et en utilisant l'identité d'Euler:

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}$$

CQFD

<u>L'identité d'Euler en question est :</u>

$$\zeta(2) = \left(\prod_{n=0}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\right)^{-1} = \frac{\pi^2}{6}$$

Démonstration : On rappelle que :

$$\forall x \in]-1;1[\colon \ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

Soit p premiers. On posant x=1/p² :

$$\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^6} + \cdots\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{p^{2n}}$$

Soit m fixé, entier naturel supérieur ou égal à 2, et q le plus grand nombre premier inférieur à m :

$$\Pi_{\mathrm{m}} = \prod_{\substack{\mathrm{p\ premier}\\ \mathrm{p\leq q}}}\left(1 + \frac{1}{\mathrm{p}^2} + \frac{1}{\mathrm{p}^4} + \cdots\right)$$

Π_m existe bien : c'est le produit fini de séries convergentes. En développant, on obtient la somme des $1/n^2$ où les n sont les entiers ayant pour diviseurs premiers les nombres inférieurs à q.

Tout entier inférieur à m a pour diviseur premier des nombres inférieurs à q. Donc :

$$\Pi_m \geq \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n^2}$$

D'où :

$$0 \leq \zeta(2) - \Pi_{\mathrm{m}} \leq \sum_{\mathrm{n}=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{n}^2} - \sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{m}} \frac{1}{\mathrm{n}^2} = \sum_{\mathrm{n}=\mathrm{m}+1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{n}^2}$$

Et comme la série de terme général $1/n^2$ converge, son reste tend nécessairement vers 0, lorsque m tend vers l'infini.

Finalement, par passage à la limite, puis par encadrement, on obtient le résultat voulu :

$$\zeta(2) = \left(\prod_{n=0}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\right)^{-1} = \frac{\pi^2}{6}$$

CQFD

6.4. « Pile ou face »

Les probabilités n'étant pas au programme de MP, cette démonstration dépasse mes capacités. Elle a donc été copiée telle quelle du site pi314 (cf. bibliographie), dans le but de justifier quand même les formules.

Lançons 2n fois une pièce de monnaie. Le nombre de cas possibles, puisqu'il n'y a que Pile et Face à chaque lancer (ne comptons pas les nombres de tranches) est donc 22n.

Comptons le nombre de fois où le nombre de Piles est égale au nombre de Faces. Dans ce cas, on compte le nombre de façons de combiner les n Piles parmi les 2n lancers, c'est-à-dire C_{2n}^{n}, le nombre de combinaisons de n parmi 2n.

La probabilité d'obtenir le même nombre de Piles et de Face avec nos 2n lancers est donc le rapport des cas favorables sur le nombre de cas possibles soit :

$$\frac{C_{2n}^{n}}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

Autre méthode : On peut directement retrouver ce résultat en remarquant que le nombre de Piles suit une loi binomiale de paramètres p=1/2 (probabilité d'un Pile) et 2n pour la taille de l'échantillon.

On obtient alors que la probabilité d'obtenir autant de Piles que de Faces est la probabilité d'obtenir n Piles soit :

$$P(X = n) = C_{2n}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2n-n} = \frac{C_{2n}^{n}}{2^{2n}}$$

Or, connaissant la formule de Wallis qui suit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{4n+2}n(n!)^4}{((2n+1)!)^2} = \pi$$

En modifiant un peu :

$$\left[\frac{2^{4n+2}n(n!)^4}{((2n+1)!)^2} \sim \pi\right] \Leftrightarrow \left[\frac{2^{2n+1}\sqrt{n}(n!)^2}{(2n+1)((2n)!)} \sim \sqrt{\pi}\right] \Leftrightarrow \left[\frac{\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)}((2n)!)}{2^{2n}\sqrt{n}(n!)^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right]$$

et comme (n+1/2) est équivalent à n à l'infini

$$\frac{((2n)!)}{2^{2n}(n!)^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi.n}}$$

La probabilité que le nombre de Piles soit égal au nombre de Faces fait apparaitre Pi lorsque le nombre de lancers tend vers l'infini.

Cette forme rappelle d'ailleurs la distribution gaussienne, ce qui n'est pas très étonnant lorsque l'on sait que si p est fixé, la distribution binomiale tend vers la distribution gaussienne lorsque n tend vers l'infini (comme toute bonne loi qui se respecte, grâce au théorème central-limite !).

Plus précisément, pour notre loi avec X le nombre de Piles suivant une binomiale, on a

$$X - n \xrightarrow{n\to+\infty} N\left(0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi.n}} e^{-\frac{x^2}{n}}$$

où f est la densité de la loi de X-n. Dans le cas du passage à l'infini, la loi discrète binomiale devient une loi continue et l'on effectue alors ce que l'on appelle la correction de continuité c'est-à-dire que P(X=n) (ou P(X-n=0)) devient $P\left(X-n \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right)$. On obtient donc comme approximation asymptotique de la probabilité d'obtenir autant de Piles que de Faces : (les équivalent étant lorsque n tend vers l'infini)

$$P\left(X-n \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi.n}}\int_{-1/2}^{1/2} e^{\frac{-x^2}{n}}\,dx \sim \frac{1}{\sqrt{\pi.n}}\int_{-1/2}^{1/2} 1.\,dx \sim \frac{1}{\sqrt{\pi.n}}$$

Car l'exponentielle tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini. On retrouve bien le résultat attendu $\frac{1}{\sqrt{\pi.n}}$en passant donc directement par l'approximation gaussienne. La cause est donc entendue, le Pi en probabilité, ce n'est que des histoires de proportions d'aires avec un cercle, ou bien cela provient de la constante de normalisation d'une distribution gaussienne !

CQFD

6.5. Démonstration de la formule BBP

Montrons d'abord ce premier résultat préliminaire :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k(8k+n)} = \sqrt{2}^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{8k+n}}{8k+n}$$

$$= \sqrt{2}^n \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{x^{8k+n}}{8k+n}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{2}^n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^{n+8k-1} dx\right)$$

$$= \sqrt{2}^n \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{n+8k-1}\right) dx$$

$$= \sqrt{2}^n \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(x^{n-1} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(x^8\right)^k}\right) dx$$

$$= \sqrt{2}^n \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(x^{n-1} \frac{1}{1-x^8}\right) dx$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k(8k+n)} = \sqrt{2}^n \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^{n-1}}{1-x^8} dx$$

Puis en reportant dans la formule BBP :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right)$$

$$= 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k(8k+1)} - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k(8k+4)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k(8k+5)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k(8k+6)}$$

$$= 4 \left(\sqrt{2}^1 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^{1-1}}{1-x^8} dx\right) - 2 \left(\sqrt{2}^4 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^{4-1}}{1-x^8} dx\right) - \left(\sqrt{2}^5 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^{5-1}}{1-x^8} dx\right) - \left(\sqrt{2}^6 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^{6-1}}{1-x^8} dx\right)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5}{1-x^8} dx$$

On pose : $y = \sqrt{2}x$

$$= \int_0^1 \left(\frac{4\sqrt{2} - \frac{8}{\sqrt{2}^3} y^3 - \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}^4} y^4 - \frac{8}{\sqrt{2}^5} y^5}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}^8} y^8}\right) \frac{dy}{\sqrt{2}}$$

$$= 16 \int_0^1 \frac{4 - 2y^3 - y^4 - y^5}{16 - y^8} dy$$

$$= 16 \int_0^1 \frac{y-1}{(y^2-2y+2)(y^2-2)} dy$$

On décompose en éléments simples :

$$= \int_0^1 \left(\frac{8-4y}{y^2-2y+2} + \frac{4y}{y^2-2} \right) dy$$

$$= -2\int_0^1 \frac{2y-2}{y^2-2y+2} dy + 4\int_0^1 \frac{1}{1+(y-1)^2} dy + 2\int_0^1 \frac{2y}{y^2-2} dy$$

$$= -2\left[ln(y^2-2y+2)\right]_0^1 + 4\left[arctan(y-1)\right]_0^1 + 2\left[ln(2-y^2)\right]_0^1$$

$$= -2\ ln(1) + 2\ ln(2) + 4\ arctan(0) - 4\ arctan(-1) + 2\ ln(1) - 2\ ln(2)$$

$$= 4\ arctan(1)$$

$$= \pi$$

CQFD

7. Bibliographie

http://www.pi314.net/ Par Boris Gourévitch

http://fr.wikipedia.org

http://www.lacim.uqam.ca/~plouffe/

DELAHAYE J-P, *Le fascinant nombre Pi,* Pour la Science, 1997

Merci beaucoup Boris Gourévitch et Simon Plouffe qui m'ont apporté leur aide durant la réalisation de ce TIPE, et qui ont bien voulu répondre à mes questions par courriels.

Jérome DURON