Calcul de π

1 Calcul de la racine carrée de *a* :

Soit la série $U_{n+1} = \frac{1}{2}.(U_n + \frac{a}{U_n})$ avec par exemple $U_0 = a$

La limite *l* est obtenue quand U_{n+1} est égal à U_n, soit :

$$l = \frac{1}{2}.(l + \frac{a}{l}) \Rightarrow l = \frac{l^2 + a}{2.l} \Rightarrow 2.l^2 = l^2 + a \Rightarrow l^2 = a$$

2 Calcul de la limite de la suite suivante :

$$\begin{cases} U_{n+1} = \frac{1}{2}.(U_n + V_n) \\ V_{n+1} = \left(U_{n+1}.V_n\right)^{1/2} \end{cases}$$

Si on pose $\cos(\alpha_n) = \frac{U_n}{V_n}$, alors :

$$\begin{cases} U_{n+1} = V_n.\frac{1}{2}.(1+\cos(\alpha_n)) = V_n.\cos^2(\frac{\alpha_n}{2}) \\ V_{n+1} = \left[V_n^{\,2}.\cos^2(\frac{\alpha_n}{2})\right]^{1/2} = V_n.\cos(\frac{\alpha_n}{2}) \end{cases}$$

$$\cos(\alpha_{n+1}) = \frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} = \cos(\frac{\alpha_n}{2}) \Rightarrow \alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n}{2} \Rightarrow \alpha_n = \frac{\alpha_0}{2^n}$$

Comme $\cos(\frac{\alpha_n}{2}) = \frac{1}{2}.\frac{\sin(\alpha_n)}{\sin(\frac{\alpha_n}{2})} \Rightarrow V_{n+1} = V_n.\frac{1}{2}.\frac{\sin(\alpha_n)}{\sin(\frac{\alpha_n}{2})} = V_n.\frac{1}{2}.\frac{\sin(\frac{\alpha_0}{2^n})}{\sin(\frac{\alpha_0}{2^{n+1}})} = \frac{V_0}{2^{n+1}}.\frac{\sin(\alpha_0)}{\sin(\frac{\alpha_0}{2^{n+1}})}$

$\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1}.\sin(\frac{\alpha_0}{2^{n+1}}) = \alpha_0$ donc $\lim_{n\to+\infty} V_{n+1} = \frac{V_0.\sin(\alpha_0)}{\alpha_0}$

Si $\alpha_0 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin(\alpha_0) = \cos(\alpha_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{U_0}{V_0}$, on a $\lim_{n\to+\infty} V_n = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\pi}{4}}.\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\pi}$

Le calcul de π se fait en recherchant la limite de la suite avec $U_0 = 1$ et $V_0 = \sqrt{2}$. On prend ensuite l'inverse de ce nombre multiplié par 4.