Une formule BBP pour $\zeta(3)$

Boris Gourévitch
ENSAI

Juin 2000

1 Formule

$$\zeta(3) = \frac{1}{672}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{12n}}\left(\frac{2048}{(24n+1)^3} - \frac{11264}{(24n+2)^3} - \frac{1024}{(24n+3)^3} + \frac{11776}{(24n+4)^3} - \frac{512}{(24n+5)^3}\right.$$
$$+\frac{4096}{(24n+6)^3} + \frac{256}{(24n+7)^3} + \frac{3456}{(24n+8)^3} + \frac{128}{(24n+9)^3} - \frac{704}{(24n+10)^3} - \frac{64}{(24n+11)^3}$$
$$-\frac{128}{(24n+12)^3} - \frac{32}{(24n+13)^3} - \frac{176}{(24n+14)^3} + \frac{16}{(24n+15)^3} + \frac{216}{(24n+16)^3} + \frac{8}{(24n+17)^3}$$
$$\left.+\frac{64}{(24n+18)^3} - \frac{4}{(24n+19)^3} + \frac{46}{(24n+20)^3} - \frac{2}{(24n+21)^3} - \frac{11}{(24n+22)^3} + \frac{1}{(24n+23)^3}\right)$$

Note : Géry Huvent a simplifié par la suite cette formule pour obtenir :

$$\zeta(3) = \frac{1}{672}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{12n}}\left(\frac{1024}{(24n+2)^3} - \frac{3072}{(24n+3)^3} + \frac{512}{(24n+4)^3} + \frac{1152}{(24n+8)^3}\right.$$
$$+\frac{384}{(24n+9)^3} + \frac{64}{(24n+10)^3} + \frac{128}{(24n+12)^3} + \frac{16}{(24n+14)^3} + \frac{48}{(24n+15)^3}$$
$$\left.+\frac{72}{(24n+16)^3} + \frac{16}{(24n+18)^3} + \frac{2}{(24n+20)^3} - \frac{6}{(24n+21)^3} + \frac{1}{(24n+22)^3}\right)$$

Cependant, la preuve en est plus difficile bien qu'utilisant le même principe, c'est pourquoi seule la première formule sera démontrée.

2 Démonstration

(avec l'aide fort utile de Raymond Manzoni)
On sait que

$$\frac{1}{a}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{a^i}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k}{(b\,i+k+1)^3}\right) = \int_0^1 \frac{1}{y}\int_0^y \frac{1}{x}\int_0^x \frac{P(z)}{a-z^b}\,dy\,dx\,dz = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{Ln^2(z)\,P(z)}{a-z^b}dz$$

par double intégration par parties, avec

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$$

Ici, on considère

$P(x) = 2048 - 11264\,x - 1024\,x^2 + 11776\,x^3 - 512\,x^4 + 4096\,x^5 + 256\,x^6 + 3456\,x^7 + 128\,x^8 - 704\,x^9$
$-64\,x^{10} - 128\,x^{11} - 32\,x^{12} - 176\,x^{13} + 16\,x^{14} + 216\,x^{15} + 8\,x^{16} + 64\,x^{17} - 4\,x^{18}$
$+46\,x^{19} - 2\,x^{20} - 11\,x^{21} + x^{22}, \quad a = 2^{12} \quad et \quad b = 24$

On décompose $\frac{P(z)}{a-z^b}$ dans $\mathbb{C}$, ce qui donne :

$$\frac{P(x)}{2^{12}-x^{24}} = \frac{7}{4}\left(\frac{1}{(\sqrt{2}-x)}+\frac{1}{(-\sqrt{2}-x)}\right)+\frac{9}{4}\left(\frac{1}{(i\sqrt{2}-x)}+\frac{1}{(-i\sqrt{2}-x)}\right)$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(1-i-x)}+\frac{1}{(1+i-x)}\right)$$

$$-\frac{9}{4}\left(\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}-x\right)}+\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}-x\right)}+\frac{1}{\left(\frac{-\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}-x\right)}+\frac{1}{\left(\frac{-\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}-x\right)}\right)$$

Or, une définition classique du trilogarithme (noté Ti dans ce document) est

$$Ti(a) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{Ln^2(x)}{\frac{1}{a}-x}$$

donc on obtient

$$\frac{1}{2^{12}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{12n}}\left(\frac{2048}{(24n+1)^3}-\frac{11264}{(24n+2)^3}\dots\right) = \frac{7}{4}\left(Ti\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+Ti\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$+\frac{9}{4}\left(Ti\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)+Ti\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(Ti\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)+Ti\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right)$$

$$-\frac{9}{4}\left(Ti\left(\frac{2}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}\right)+Ti\left(\frac{2}{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}\right)+Ti\left(\frac{2}{-\sqrt{6}+i\sqrt{2}}\right)+Ti\left(\frac{2}{-\sqrt{6}-i\sqrt{2}}\right)\right)$$

Notons S cette quantité.
D'après la formule de duplication de Lewin (1991) [1],
$Ti(x)+Ti(-x)=\frac{1}{4}Ti(x^2)$ donne

$$Ti\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+Ti\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4}Ti(\frac{1}{2}) = \frac{1}{96}(-2\pi^2\,Ln(2)+4\,Ln^3(2)+21\,\zeta(3)) \quad (1)$$

D'autre part, d'après Landen [1],

$$Ti\left(\frac{-z}{1-z}\right)+Ti(z)+Ti(1-z) = \zeta(3)+\frac{\pi^2}{6}Ln(1-z)-\frac{1}{2}Ln(z)Ln^2(1-z)+\frac{1}{2}Ln^3(1-z)$$

En prenant $z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$, on obtient :

$$Ti\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)+Ti\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)+Ti(i) = \zeta(3)+\frac{\pi^2}{6}Ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)-\frac{1}{2}Ln\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)Ln^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)+\frac{1}{2}Ln^3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$

donc

$$Ti\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)+Ti\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right) = \frac{35}{32}\zeta(3)+\frac{1}{24}Ln^3(2)-\frac{5}{96}Ln(2)\pi^2 \quad (2)$$

car

$$Ti(i) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^{2k}}{(2k)^3}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{2k+1}}{(2k+1)^3} = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^3}+i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{-3\zeta(3)+i\pi^3}{32}$$

En…n,

$$\left(Ti\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)+Ti\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right)-\left(Ti\left(\frac{2}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}\right)+Ti\left(\frac{2}{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}\right)+Ti\left(\frac{2}{-\sqrt{6}+i\sqrt{2}}\right)+Ti\left(\frac{2}{-\sqrt{6}-i\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(Ti\left(\frac{1}{2}\right)-Ti\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)-Ti\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\right)\right)=\frac{1}{4}\left(Ti\left(\frac{e^{i\pi}}{2}\right)-Ti\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)-Ti\left(\frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)\right) \quad (3)$$

On utilise ensuite le théorème de multiplication [1]

$$\frac{Li_n(z^m)}{m^{n-1}} = \sum_{k=0}^{m-1} Li_n\left(z\, e^{2i\pi\frac{k}{m}}\right)$$

Avec $z = -\frac{1}{2}$ $n = m = 3$ on obtient

$$Ti\left(-\frac{1}{2}\right) - Ti\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\right) - Ti\left(\frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2}\right) = 2Ti\left(-\frac{1}{2}\right) - \sum_{k=0}^{2} Ti\left(-\frac{e^{\frac{2i\,k\pi}{3}}}{2}\right) = 2Ti\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{9}Ti\left(-\frac{1}{8}\right) = S'$$

Pour enlever les signes négatifs, on utilise maintenant la formule de duplication [1]

$$Ti\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}Ti\left(\frac{1}{4}\right) - Ti\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$Ti\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{4}Ti\left(\frac{1}{64}\right) - Ti\left(\frac{1}{8}\right)$$

donc, S' devient

$$S' = -\frac{1}{36}Ti\left(\frac{1}{64}\right) + \frac{1}{9}Ti\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{2}Ti\left(\frac{1}{4}\right) - 2Ti\left(\frac{1}{2}\right)$$

On utilise maintenant la belle formule Bailey-Borwein-Plou¤e [2]:

$$\frac{35}{2}\zeta(3) - \pi^2 Ln(2) = 36Ti\left(\frac{1}{2}\right) - 18Ti\left(\frac{1}{4}\right) - 4Ti\left(\frac{1}{8}\right) + Ti\left(\frac{1}{64}\right)$$

qui donne finalement pour S'

$$S' = -\frac{1}{36}\left(\frac{35}{2}\zeta(3) - \pi^2 Ln(2)\right) - Ti\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{36}\left(\frac{35}{2}\zeta(3) - \pi^2 Ln(2)\right) - \frac{1}{24}\left(21\zeta(3) - 2\pi^2 Ln(2) + 4Ln^3(2)\right)$$

On peut maintenant évaluer S avec $(1),\ (2),\ (3),\ S'$:

$$S = \frac{7}{4}\,(1) + \frac{1}{2}\,(2) + \frac{9}{4}\,(3) = \frac{7}{4.96}(-2\pi^2\,Ln(2) + 4\,Ln^3(2) + 21\,\zeta(3))$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{35}{32}\zeta(3) + \frac{1}{24}Ln^3(2) - \frac{5}{96}Ln(2)\pi^2\right) - \frac{9}{4.4}\left(-\frac{1}{36}\left(\frac{35}{2}\zeta(3) - \pi^2 Ln(2)\right) - \frac{1}{24}\left(21\zeta(3) - 2\pi^2 Ln(2) + 4Ln^3(2\right.\right.$$

$$S = \frac{21}{128}\zeta(3)$$

donc

$$\zeta(3) = \frac{128}{21.2^{12}}\sum(\ldots)$$

$$\zeta(3) = \frac{1}{672}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{12n}}\left(\frac{2048}{(24n+1)^3} - \frac{11264}{(24n+2)^3} - \frac{1024}{(24n+3)^3} + \frac{11776}{(24n+4)^3} - \frac{512}{(24n+5)^3}\right.$$
$$+\frac{4096}{(24n+6)^3} + \frac{256}{(24n+7)^3} + \frac{3456}{(24n+8)^3} + \frac{128}{(24n+9)^3} - \frac{704}{(24n+10)^3} - \frac{64}{(24n+11)^3}$$
$$-\frac{128}{(24n+12)^3} - \frac{32}{(24n+13)^3} - \frac{176}{(24n+14)^3} + \frac{16}{(24n+15)^3} + \frac{216}{(24n+16)^3} + \frac{8}{(24n+17)^3}$$
$$\left.+\frac{64}{(24n+18)^3} - \frac{4}{(24n+19)^3} + \frac{46}{(24n+20)^3} - \frac{2}{(24n+21)^3} - \frac{11}{(24n+22)^3} + \frac{1}{(24n+23)^3}\right)$$

Note complémentaire : La formule BBP s'obtient par l'équation de Kummer pour n=3 (Lewin 1991 (3.10)) considérée dans l'article d'Abouzahra et Lewin "The polylogarithmic in algebraic number fields" J. Number Theory 21 (1985)

References

[1] Lewin, "Structural Properties of Polylogarithms" 1991 AMS

[2] Bailey, D.; Borwein, P.; and Plou¤e, S. "On the Rapid Computation of Various Polylogarithmic Constants." http://www.cecm.sfu.ca/ pborwein/PAPERS/P123.ps.